이과반

9월 직전 총정리

수학은,

실전이다.

< 수업목표 >

✓ 9월 직전 총정리

배포용

수능수학, 홍현빈

이 칼럼은 9월 모의고사 직전, 그간 배운 모든 것들과
최근 3개년 9월 평가원 시험 중 교과과정에 맞는 것들을 실어놓고 분석해놓은 칼럼입니다.

시험 직전이니, 여러분이 열심히 복습한 것들을 다시 정립한다생각하시고 보면 되겠습니다.

열심히 복습.. 해왔죠?

가볍게 쓱- 정리만 해두려 했는데, 그러면 분명 여러분들이 고개만 끄덕이고 말 것 같아서, 자세히 정리를 해봤습니다. 그냥 편안하게 쫙 읽다가 주춤하는 부분이 등장하면 별표치고 그 자리에서 3번씩만 읽어주시면 될 것 같습니다.

★★★★★배포자료 보시는 수험생분들께

- 이건 9월 직전 총정리하시라고 배포하는 겁니다.(수업때 쓰는 자료들입니다...) 해서 “이게뭐지?”하실 수도 있고, “왜 이건 없지?” 하실 수도 있습니다.

어차피 정리는 여러분 스스로 하시는건데, 그 전에 좀 기틀을 잡아드리고자 이 자료를 배포하는 것이니, 여기에 살을 붙이거나 오답정리하거나 하시면서 정리하세요.
현강자료와는 조금 차별이 있습니다.(아무래도 자작문제가 들어가니) 그런데 이건 제가 그냥 배포하는것이니 크게 문제 없겠죠? 스스로 정리 꼭 해보시고 9월 잘보세요.ㅎㅎ

미적분 Ⅱ

지수로그 방,부등식

결국엔 두가지 뿐!

★1. 치환 / 2. 밑이 같으면 위만 비교할것

이 둘 이외엔 잘 묻지 않으니 (예외패턴 : 교재참고)

딱 봤을 때 어떻게 풀지 감이 오면 그냥 풀면되고,

안오면 무조건 둘 중 하나로 생각하는 습관만 기르면 됩니다.

+ 주의해야 할건 딱 두가지죠?

$\log x$ - 로그함수에서 정의역 x 는 무조건 양수다.

2^x - 지수함수를 t로 치환하면 t는 무조건 양수다.

이건 " 주의하세요 " 로 끝날게 아니라,

문제를 보는 순간 " 반응 " 해야할 부분 입니다.

엇! 하는 순간 엇! 하고 반응해야한다 이말입니다.

물론 제일 좋은건, 굳이 반응할필요도 없이 몸에

붙어 있는 것이 최선입니다.

어렵지 않은 유형이니 패스하겠습니다.

이 부분이 어렵다면 제가 처음 가르칠때부터

쉬운 문항 많이 풀면서 연습많이 하라 했었는데

했는지?

지수로그 함수

뭐뭐 배웠었나 나열해봅시다.

0. 밑의 크기에 따라 변하는 지수함수와 로그함수를 반드시 그릴 줄 알아야 한다.

1. 관계가 있으면 무조건 관계를 따져준다.
(평행이동 & 대칭이동)

2. 모르는 좌표는 보자마자 t로 둘 것.

3. 문제를 봤는데 그래프가 그려져 있지 않는경우,
일단 그래프나 점을 "그려본다"★★★

4. 역함수 관계를 잘 따져보고, 역함수 관계일시
반드시 $y=x$ 그려놓고 성질 활용.
(본 책에선 안했지만, 역함수관계는 자주 출제되는 소재이기에, 숙제나 테스트로 짧게 다뤘었습니다.)

여기도 마찬가지로 크게 어렵지 않고,

저 설명들보단, 설명을 자꾸 적용하면서 문제푼 경험들이

더 큰 도움이 되므로, 이쪽 유형에 약하다싶으면

빨리 문제들 싹 모아놓고 푸시길 바랍니다.

삼각함수

기본 삼각함수계산은 얘기하지 않겠습니다.

관건은 삼각함수와 도형 단원인데, 배웠던 것들을 차근차근 짚어봅시다.

<u>★★i)삼각함수는 직각삼각형과 떼놓을 수 없는 관계이다.</u>

도형을 삼각함수의 관점으로 접근할 때,(삼각함수 도형문제 풀 때) 직각삼각형을 <u>반드시</u> 이용하도록 해야합니다.

여러분이 삼각함수 문제푸는데 직각삼각형을 안썼다!
그건 그냥 나 안풀래요. 나 틀렸어요 하는겁니다.
즉 무조건 문제풀 때 **<u>“묻고자 하는 것을 실현시켜줄 직각삼각형!!“</u>**을 찾는데에 혈안이 되어 있어야 하고

만약 문제에 직각삼각형이 없다면 **<u>보조선을 그어서 만들어줘야합니다.</u>**

저랑 푸는 n제에선 “왜 보조선이 이렇게 그어지지?” 하는 문항들이 좀 있는데, 평가원에선 그런 문제가 없습니다. 무조건 이유가 있고 논리가 있으므로, 배운내에서만 생각하세요.

(+ 직각삼각형 찾을 때 **<u>두 길이가 주어진 직각삼각형은 반드시 활용된다 했었습니다.</u>** 무엇으로? 덧셈정리로.)

<u>★ii) 직선과 직선사이의 각 < 단독문제로 자주 출제</u>

대놓고 “나 직선과 직선사이의 각입니다.” 라고 할 수도 있지만, 그걸 도형속에 숨겨놓는 상황이 출제됩니다.
이럴경우, “오” 하면서 바로 반응을 할 줄 알아야 합니다.

<u>★★★iii) 원이 나오면 원과 관련된 성질은 무조건 쓰인다.</u>

> 접선의 수선 내릴 수 있음
> 원 위의 점과 중점을 이은 선분의 길이는 반지름
> 원 위의 두 점과 중점으로 만든 삼각형은 이등변삼각형
> 중심각은 원주각의 2배이다.
> 원주각은 모두 각이 같다.
> 원 위의 점과 지름으로 만든 삼각형은 직각삼각형
> 원에 내접하는 사각형의 마주보는 각의 합은 180도 이다.

도형 & 극한

삼각함수&도형에서의 i),ii),iii)과 모두 중복됩니다.

추가되는건,

<u>★★핵심은 길이를 θ에 관한 식으로 표현하는 것이다.</u>

그렇기에, 문항을 보자마자 원의 성질, 직각삼각형 만들기 등을 이용해서 보조선을 그은 뒤에 해야할 행동은,

<u>★내가 어떤 길이를 구해야하며 그 길이를 어떻게 θ로 표현 할 것인가.</u>

입니다.

이제 그 과정에서 여러가지가 쓰였던 것이고,
삼각함수와 중복된 것도 그냥 같이 정리하여 쓰자면
다음뿐입니다.

<u>★</u>i) 직각삼각형 > 특수각, 피타고라스
~~★ii) 그냥 삼각형 (with 두변과 끼인각) > 제2코사인법칙~~
~~> 사인법칙~~

<u>★★★</u>iii) 원 등장 > 원의 성질 <u>반드시</u> 활용
(+ 직각삼각형 만듦)

++ 그래서 난이도 있는 문제에선, 구하라 하는 길이를 보고 어떻게 구해야 할지 역설계하는게 정말 중요합니다.
이 길이를 표현할 수 있는 직각삼각형이 있는지?
없으면 간접적으로 구해야 할텐데 (길이 빼기 길이)
그러면 빼질 길이를 θ로 표현해줄 직각삼각형이 있는지

문제에서 θ가 등장했는데 이걸로 만들 수 있는 직각삼각형이 있는지. 그 직각삼각형은 답을 도출해내는 유의미한 직각삼각형인지. 아니라면 닮음을 활용하여 θ를 다른 곳으로 끌고가서 직각삼각형을 만들어야 하는지 등등!

다 수업때 했습니다. 복습하세요.

미분

먼저 배운 것들을 나열해보면,

1. 연속.
2. 접선의 방정식.
3. 미분가능.
4. 도함수의 해석.
5. 미분심화

입니다. 차근차근 하나씩 정리해봅시다.

<1. 연속>

연속은 크게 어렵지 않을 겁니다. 매우 쉽게 나오거나,
이번 3월 교육청 30번처럼 간접적으로 출제될 겁니다.

뭐 어떻게 나오든, 연속의 정의인
"좌극한 = 우극한 = 함수값" 만 따져주면 됩니다.
만약 어느 점에서 따져줘야 할지 모르면,
"모든 불연속점"을 조사해주면 됩니다.

-참고문제.

< 2. 접선의 방정식 >

접선의 방정식은 단 하나의 식만 배웠다 했었죠.

" $y = f'(t)(x-t)+f(t)$ "

여기서,

1. 접점이 주어져 있다.
2. 접점이 주어져 있지 않다. → t로 두고 접근

라고 배웠습니다.

뒤에 부분을 강조하느라 이 부분을 우리가 여기까지만 언급하고 넘어갔습니다만,

사실 이 부분은 킬러문제를 해결하는데에 있어 중요한
도구 중 하나입니다.

왜 그런거 얘기했었잖아요.

"원점에서 접선 그은 문제(혹은 접선이 원점지나는 문제)
는 $\dfrac{f(t)}{t} = f'(t)$로 푸는게 수월하다."

저 말 자체가 "접선의 방정식으로 푸세요."를 그냥 자주나오는 상황만 공식처럼 빼놓은 겁니다.

즉, **"접선의 방정식"을 활용하여 푸는 심화문제** 가 자주
등장한단겁니다.

그럼, 이렇게 정리해 볼 수 있습니다.

"심화(킬러)문제에서 접선의 방정식을 자주 활용한다."

음... 별 도움이 안되는 말이죠?

좀 실전적으로 가자면,

"접한다/접하는 등의 표현이 심화(킬러)문제에 등장하면
접선의 방정식으로 무조건 풀 수 있다. (접선의 방정식으로
안풀어도 되지만, 접선의 방정식으로 **"안풀리진"** 않는다"

관련 문제를 한번 봅시다. 수업 때 안했으니, 접근과정을 자세히 서술해보죠.

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다. (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

풀이는 다음장에 넘겠습니다.

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

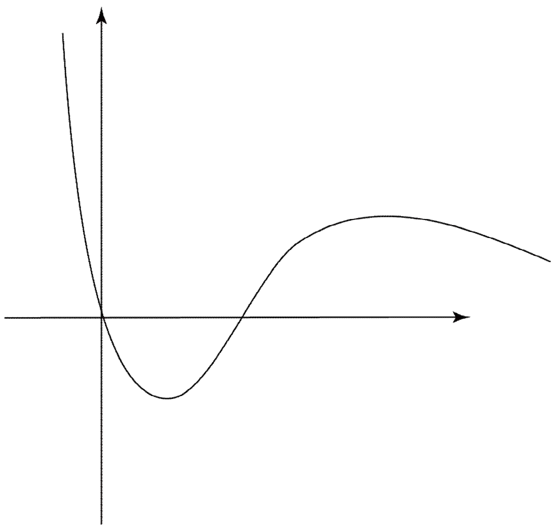
<사고과정 >

(가)조건을 보고, $g''(1)=g''(4)=0$임을 알고, $g(x)$를 두 번 미분할 생각을 해줍니다. 또한 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$라 둘 수 있습니다.

정리하면, $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$가 됩니다.

그러면, 여기서 풀이가 둘로 나뉩니다.

1. 그래프 개형을 그리자.

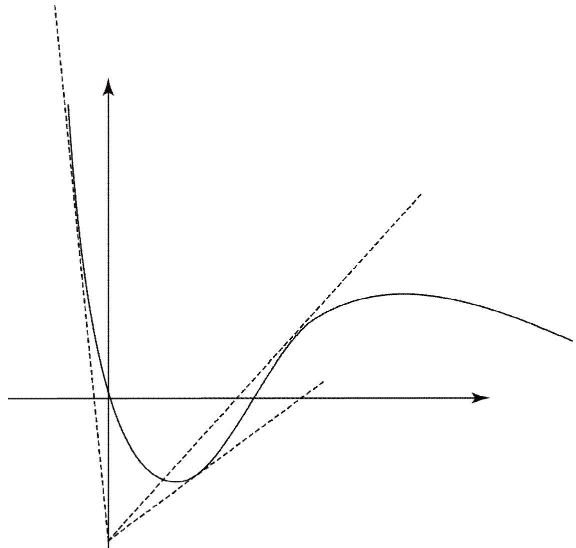


(★★여기서, a값이 양수란 조건이 없으므로, 언제든 a값이 음수가 될 수 있음을 기억.)

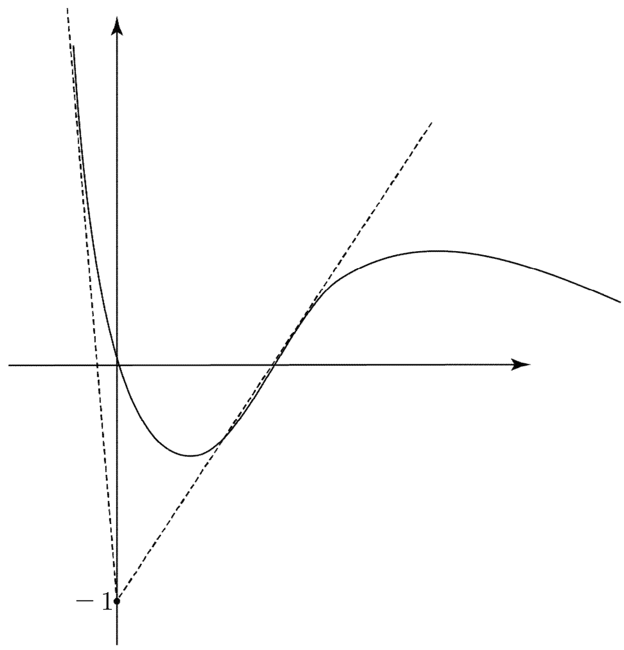
접선의 개수가 3개인 k의 범위가 $-1<k<0$인 것으로 보아, $k=0$이나 $k=-1$인 순간은 "특수한 상황"임을 알 수 있다. ($-1<k<0$은 일반적인 상황)
(Q.어떻게 알죠? - A. 뭐배웠어......)

$k=0$일 때는 그래프에서 "한 개의 접선"만 존재하는 상황을 알 수 있다.(+ 원점에서 그은 접선- 하지만 무쓸모)

$k=-1$일 때는 접선이 3개가 아니라는 건데, 그럼 접선이 2개여야 한다. 즉, 그림과 같이 변곡점을 지나는 상황이여야 함을 안다. (+ 특수한 상황임을 캐치)



< $\underline{-1<k<0}$ 인 상황 >



< $\underline{k=-1}$ 인 상황 >

(가)조건에서 $x=1$에서 변곡점을 갖는다 했으므로, 변곡점 $x=1$을 지나는 접선이 $(0,-1)$을 지난다. 즉 기울기가 1이다.로 풀면된다. ($\therefore$ $g'(1)=1$)

이것이 풀이1이고, 풀이2는 다음장에서 보자.

2. 접선의 방정식으로 접근.

(나)조건을 자세히 보자. “접선의 ~ ” 란 표현.
보자마자 떠올리면 좋다.
“아 접선의 방정식으로 풀면 무조건 풀리는구나.”

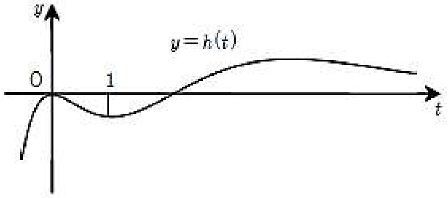
그 풀이는 아래와 같다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\, g(t))$에서 그은
접선의 방정식은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\, k)$를 지나므로, 대입하면
$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서 $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.
(그래야 $y=-1$과 세점에서 만난다. 즉 “극솟값”을 가지고 문제를 출제했음 = 특수한 상황/정보 출제)



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$
$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}=72a^2e^{-2}$
$=72e^2e^{-2}=72$

두 풀이를 보았다. 여기에 대해선 논란이 많다.

1번풀이가 맞냐? 2번풀이가 맞냐?

하지만 수능에선 어느 한쪽 풀이로 풀면 절대 안풀리게끔 출제하지 않는다.(아직까진?) 되려 융통성있게끔 출제하기 때문에, 편한 방식으로 학습하되 어느정도 실력이 되면 나머지 방식도 꼭 익힐 것.

(+융통성있다는게 야매로도 풀리게끔해준다. 라는 뜻은 아니다.)

(++ 여튼, “접선/ 접한다” 라는 표현이 등장할 때 어떻게 풀이가 진행되는 지를 보았다.)

< 3. 미분가능성 >

매우 중요한 부분입니다. 출제도 많이 되었던 파트입니다.

저랑은 총 두가지로 나눠서 학습했었습니다.

1. 미분가능성
=> 식으로 접근.("무조건 나뉜다!!")

기억나죠? 어떤 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하냐? 물었다면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 무조건 좌 / 우 로 식이 나뉠 것이고, 그러면 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & (x<t) \\ 3kx^2 & (x \geq t) \end{cases}$

처럼 식이 나뉠 것을 압니다.

단순한 문제뿐만 아니라, 고난도 30번 문제에서도
예외가 없음을 교재에서 다뤘습니다.

해서, "미분가능하냐? 불가능하냐? "라는 문제가 나오면,

무조건 식으로 나눠서 정리할 생각만 하는게 맞습니다.

그 후, 1. 연속 / 2. 좌미분계수 = 우미분계수
확인해주면 끝나겠죠.

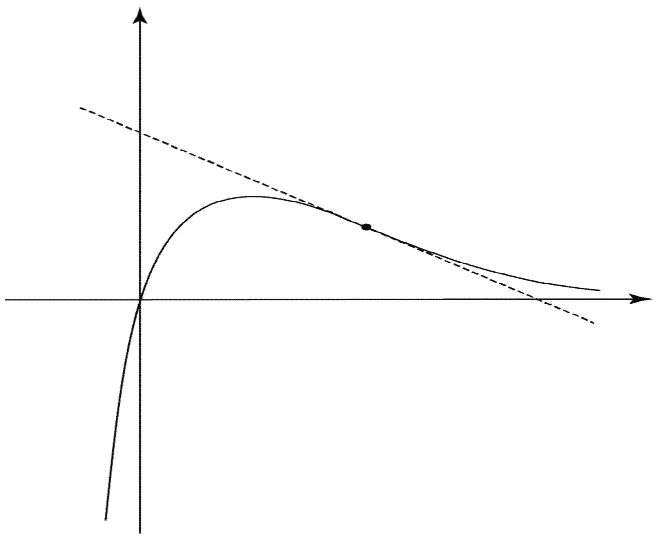
2. 미분가능성
=> 그래프로 이해.

식으로 문항을 푸는게 아닌, 단순히 그래프로 "이렇지" 하고 푸는 것을 말합니다.

대표적인 문항이 아래 문항이었죠.

✓ 두 함수 $f(x)=xe^{-x+a}$와 $g(x)=-x+b$에 대하여 함수 $y=|f(x)-g(x)|$가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
$\left(\text{단}, \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\text{이다.}\right)$

이 문항을 그래프로 해결하면, 결국 아래 그림이었습니다.



또한, "변곡점을 지나는 접선" 이라는, 변곡점이라는 정보 즉 특수한 상황을 문제로 출제했다고 얘기를 했었죠.

정리하면, 아래 3가지 상황은 굳이 식으로 안풀어도 됩니다.

1. $|f(x)|$의 미분가능성 (곡선과 x축)
2. $|f(x)-t|$ 의 미분가능성 (곡선과 직선 $y=t$)
3. $|f(x)-g(x)|$ (곡선과 곡선)

< 4. 도함수의 해석 >

여기선 좀 할말이 많습니다.

처음에 배운건, "$f(x)$의 도함수 그래프를 알면 무조건 $f(x)$의 개형을 그릴 수 있다." 였습니다.

즉, $f(x)$의 증가,감소,극대,극소,변곡점에 대한 것들은 모두 도함수와 이계도 함수로부터 나오는 것을 알 수 있고, (원래는 이걸 알고 있으니 도함수만 알면 원래함수를 그릴 수 있다가 맞는 순서입니다만, 이해가죠 여튼?)

그러므로 모든 증가,감소,극대,극소,변곡점 문제는
<u>도함수를 활용하여 (그려서) 해결할 수 있습니다.</u>

그런데 문제는, 증가,감소,극대,극소,변곡점를 대놓고 알려주지 않고 "해석"을 먼저 해야하는 경우가 생깁니다.
즉, 숨겨놓는 거죠.

대표적 두 문제가 작년 9월 30번과 작년 6월 21번입니다.

(9월 30번 문제도 저랑 못했네요. 고난도 미분문제는 어떻게든 수업 때 다루거나 이렇게 칼럼식으로 다 다룰겁니다. 하지만 그 이전에 접근하는 사고방식이 중요하여 살짝 간단한 문제들을 다룬거니 양해부탁합니다. 이해하시죵?)

30. 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오.

이 문제는, (나)조건을 어떻게 해석하느냐가 관건이었습니다. 평균값정리를 활용하는 풀이도 있었으나,
식을 정리하여 $f(x_2)+x_2 \ge f(x_1)+x_1$ 이렇게 두고
함수 $f(x)+x$는 증가한다! 로 해석한 뒤에
$f(x)+x$의 도함수를 활용하면 되는 문제였습니다.

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1\le g(n)\le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?

[4점][2015년 6월]

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

6월 30번 문항도 마찬가지입니다.
"역함수를 갖는다" = "증가 혹은 감소한다" = "증가한다"
해서 주어진 $f(x)$가 증가한다로 풀면 되는 문제였습니다.

물론 증가한다
$\rightarrow f'(x) \ge 0 \rightarrow$ 극소값이 양수다.(개형 상)
으로 풀이가 전개되는 문제였죠.

(**사실 6월 9월 모두 증가 감소 문제여서 수능도 그렇게 예측이 됐으나 전혀 딴 문제가 나왔죠. 이래서 수능외의 시험들은 크게 신경안써도 됩니다. 공부는 똑같이 계속해야해요.)

정리하자면, <u>문제에서 대놓고 증가감소극대극소 등의 표현을 쓰면 도함수로 확인을 꼭 하고 (도함수 부호변화!!) 대놓고 표현을 안쓰고 수식이나 표현으로 숨기는 경우가 있는데, 하지만 눈치를 챌 수 있어야 한다</u>. 정도가 되겠네요.

(+올해 교육과정이 바뀌면서, 증가 감소에 대한 정의가 포괄적으로 되었지만 인위적인 함수를 내지 않으면
상관없습니다. 물론 인위적으로 낼 수 있어요. <u>그러니 개정 증가감소 정의는 한번씩 짚고 가길 바랍니다.</u>)

< 5. 미분 심화 >

미분심화에선 총 3가지를 언급했었습니다.

I) 그래프 그리기
ii) 새로운 함수 (상황) 정의
iii) 정보 + 상황 묻기

I) 그래프 그리기.

- 그래프 그리기는 기본 중의 기본입니다만, 여기선 간단 한 행동을 요구하는 겁니다.

어떠한 $f(x)$식이 그대로 주어져있다면, 바로 "그래프"를 그릴 생각을 할 수 있다는 겁니다. 할 수 있다가 아니라 **그래프를 무조건 그리고 시작**하라했었죠.

당연히 식이 나왔는데 미분을 할 수 있을테고,
미분해서 나온 도함수의 **"부호변화"**를 체크한 뒤에 필요하다면 이계도 함수까지 체크해서 그래프를 "상세히" 그릴 수 있을겁니다.

근데 중요한건, "식이 나오지 않아도" 그릴 수 있으면 좋습니다. 물론 자주등장하는 "다항함수$\times$ e^x" 꼴 같은 상황에서 말이죠.
어떤 강사나 학생들은 그래서 마치 다항함수 개형추론 처럼 문제를 풀어내곤 합니다.

뭐.. 별로 반갑지는 않다만 한번 슥 읽어만 보세요.
14수능 30번 문제를 다시한번 봅시다.

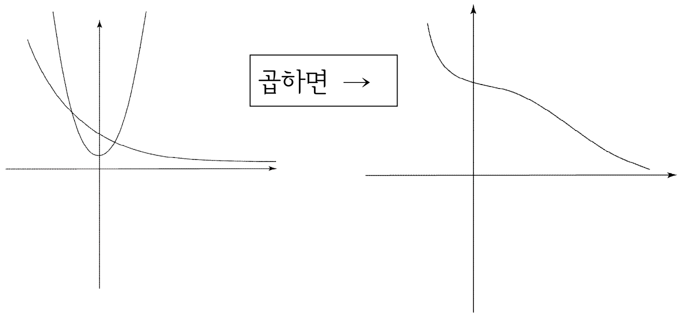
30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

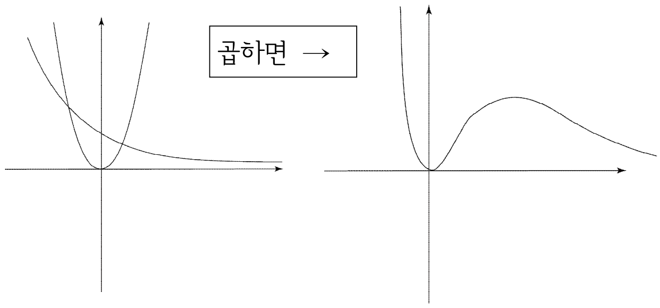
$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

이 문제에서, 어차피 $f(x)$의 최고차항이 양수라 가정한다면, $f(x)e^{-x}$로 그려지는 그래프 개형은 **3개 뿐이 없습니다.**
곱함수 기억나죠? 곱함수 그릴 때를 한번 잘 생각해봅시다.

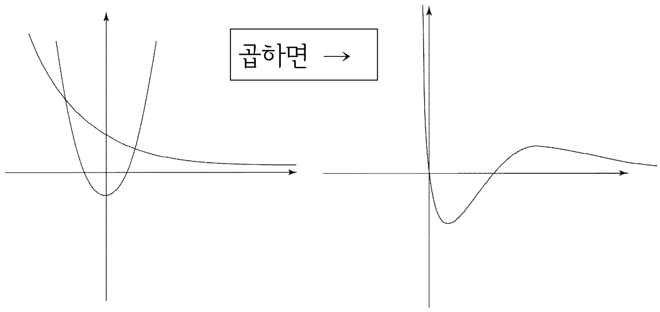
첫 번째 →이차함수가 떠있을 때



두 번째 → 이차함수가 중근을 갖을 때



세 번째 → 이차함수가 두 실근을 갖을 때



어차피 개형이 3개뿐이니 (나)조건만족하는건 세 번째네? 하고 바로 풀어도 되는 문제입니다.

근데 솔직히 말해서 전, 비추천합니다.
워낙 다항함수 $\times$ e^x 꼴이 많이나와서 그런건 저도 알고 이해합니다만, 그렇게 안나오면?

네 어차피 미분해서 하던대로 해야하니깐.
그냥 하던대로 하세요.

ii) 새로운 함수 & 상황 정의

새로운 함수는, " ~~를 $g(x)$라 하자" 같은 류의 문제입니다. 이쪽 유형은 난이도를 무한히 높일 수 있는 부분이라 킬러문제에서도 자주 활용된다 했었습니다.

물론 그냥 "~~를 $g(x)$라 하자." 한뒤에 단순히 수식으로 풀어나가는 것도 있지만, 그건 새로운 함수 유형이라하기엔 좀 간단한 문항들이고,
여기선 말그대로 새로운 함수를 정의하고 그것에 대한 **이해가 필요한** 문항들에 대한 이야기입니다.

새로운 함수 유형은 중요한 만큼, 할 얘기가 없습니다.(?)

방법은 수업 때 했던 것이 끝이고, 그 이후는 결국
많은 훈련이니깐요.

계속 얘기하지만 사고과정이 단순한 것, 즉 한 두 번의 시행착오 혹은 시행착오도 필요없는 문제는 쉬운 문제가 되겠고,

적어도 3-4번의 시행착오는 거쳐줘야 문제이해가 비로소 가는 것들은 어려운 문제가 됩니다.

여러분의 지금 사고수준이면 사고과정이 조금만 복잡해지면 굉장히 힘들거예요. 많은 연습뿐만이 살 길입니다.

최근 교육청 – 평가원 두 문제만 보면 어떤 유형인지
바로 알 수 있습니다.

30. 함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점][2016년 3월 교육청]

21. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?
[4점][2013년 수능]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\dfrac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

두 문제를 만약 "그래프"그려서 새로운 함수를 이해. 하려는 풀이로 가자면, 매우 동일한 문제가 됩니다.
먼저 그래프를 그릴 것이며, 아무 t나 두고 그려가며 혹은 시도해가며 새로운 함수를 이해하고 난 후에, 비로소 문제를 풀면 됩니다.

차이는 이번 3월은 "극대"라는 특수한 상황을 답으로 냈고, 2013 수능 21번은 "접한다" 라는 특수한 상황을 답으로 냈습니다.

+ 물론, 21번문제는 "미분가능성"을 묻고 있기 때문에,
새로운 함수를 이해한 후에 식으로 가도 됩니다. 깔끔하게 풀립니다. 아니면 미분가능성의 두 번째 풀이인 그래프로 가도 되구요.

결론!

새로운 함수
□
아무 t, 식, 그래프, 등등 시도해 볼 것.
□
바로 이해가면 답을 내고,
이해가 가지 않으면
여러번 더 시도.
□
시도한 것을 바탕으로 문제를 이해.
(이건 왜 만족을 못하고, 이건 왜 만족을 하는가?)
□
식 & 답 도출

iii) 정보 + 상황 묻기

지금까지 쭉 써오면서 몇 번이미 언급을 했지만,
다시 한번 정리하자면,

"극대, 극소, 접하는 상황, 원점에서 그은 접선, 변곡점 … " 같은 정보+특수한 상황은 문제에 정말 자주 출제되며, 자주 출제 될 수 밖에 없는 것이 답을 내는 식을 도출 할 때 배운 것이 적용될 수 밖에 없기 때문이다.

로 정리가 가능하다.

해서, 문제를 풀 때, 문제에서 요구하는 바를 충족시키는 어떠한 "상황"은, 위에서 언급한 특수한 상황일 것이므로
어느정도 짐작하고 접근이 가능합니다.

계속 강조하지만 "찍기"랑은 본질적인 성격이 다른겁니다.
찍기 란건 아무런 근거없이 이거 같은데? 이고,

지금 강조하는건 문제를 풀어가면서 어느정도 짐작해 볼 수 있다는 것이기 때문에 그 짐작한 것을 먼저 체크해보고 맞으면 좀 더 빠른 접근이 가능한, 그런 겁니다.

출제자 입장에선 사실 이러한 접근은 가볍게 막아버릴 수 있습니다. 안내면 그만이니깐요.
하지만 문제에서 그래프가 등장하는 유형에선 저 유형들을 피해서 출제한단건 정말 힘든일입니다.

다 떠나서, 굳이 그렇게 내질 않습니다.

아니 저것들은 야매가 아니라, 배운게 저것뿐이니 문제에서 저것들이 출제될 수 밖에 없다! 라는 사고지침이기 때문에 평가원이 뭘 막고 이럴 수가 없다니깐요? 막으려 하지 않고 되려 장려할 겁니다.

"접선의 방정식" 파트를 서술 할 때에 나온 14수능 30번 문제도, 접선의 방정식으로 문제를 풀어나가면 "변곡점"을 지나는 접선이라는 특수한 상황인 것을 몰라도 답이 도출됩니다. 하지만 그 풀이를 보면 결국은 또 극값이 출제가 됩니다.

네 결국 그런식이죠.

6월은 어찌나올지 모르겠습니다만, 그래프를 그려야 하는 경우가 등장하면, 그리고 만약 난이도가 높다면,
뭔소리지 하지말고, 내가 배운 여러 상황들 중 무엇을 출제소재로 삼았을까를 곰곰이 생각해보시길 바랍니다.

++(애초에 찍을 일이 있으면 안되지만..ㅎㅎ)찍더라도 배운 상황으로 찍으세요 제발.

< 6. 그 외 >

아직 우린 안한게 많습니다. ~정리 + 음함수 역함수 매개변수미분 등 요즘 각광받는 부분들.
차근차근 할 예정입니다.

적분

큰 출제틀부터 보도록 합시다.

i) 무한급수 > 정적분 변환. (미적분Ⅰ 내용)

ii) $\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴

iii) 정적분의 계산

iv) 적분의 넓이해석

v) 적분활용 (다루지 않음)

★★i) 무한급수 > 정적분 변환

변환시 두가지의 방법이 있습니다.

1. $\frac{k}{n} = x$, $\frac{1}{n} = dx$ 로 본다.

> 장점. 95% 구간은 0~1 까지이고,
dx 를 뭘로 둘지 굳이 고민을 하지 않아도 된다.

2. $ex)\sum_{k=1}^{2n} f(1+\frac{2k}{n})\frac{1}{n}$

f 속에 있는 것을 x로보는, 즉 $1+\frac{2k}{n} = x$.

또한 dx 는, $\frac{2}{n}$으로 보는 방법.

> 장점. 적분식으로 바꾼뒤에 계산이 편한다.
> 단점. dx 를 뭘로 보냐가 가끔 헷갈리고,
실수유발의 근원이라 감점대상.

둘의 차이점은 결국 **내가 무얼 x로 보느냐**이고
공통점은, 시그마 양 끝을 대입한 x의 결과가
인테그랄의 아래끝 위끝이 된다는 것이였습니다.

이건 기본요소이고, 어렵게 나올 땐
$ex)\sum_{k=1}^{2n} f(1+\frac{2k}{n})\frac{1}{n}$ 이렇게 식이 주어지지 않고
그 자체를 구하게끔 출제가 됩니다.

그 때의 tip은,

어차피 $\frac{k}{n} = x$ 로 치환할 것이기 때문에,
애시당초 x로 두고 풀면 된다. 였고

아니면 그냥 변하는 값을 x로 두고 바로 식을
세울수도 있다. 했었습니다.

그리 어려운 부분이 아니니 Pass!

★★★ii) $\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴.

이런 식이 출제되면, 할 수 있는건 오로지 두가지 뿐이라 했었습니다.

1. 미분.
2. $x = a$ 대입.

배운건 오로지 두가지 뿐이기 때문에. 제발 무조건 미리 해두고 들어가는 것이 중요합니다.

저것들은 고난도 문제에서, 치환이나 부분적분 과정에서
"조건"으로 쓰이는 경우가 많기 때문에. 보자마자
미분하세요. 미루지말고.

★★★★iii) 정적분의 "계산"

만약 "정적분"이 출제가 되었다면,
그 소재로 100% 출제 될 수 밖에 없을정도로 출제빈도가
높고, 하도 많이 나와서 그 과정이 점점 복잡해지는
유형입니다.

가장 중요했던건,

정적분 계산으로 출제될 수 있는건 결국 두개 !!

부분적분 / 치환적분

더더욱 중요한건, 저 두개가 출제된다. 를 넘어선
고차원의 사고(가 아닌 다른 차원의 사고)

바로, **"어떤 문제가 나오든 저거 두개중 하나이다."**

"뭔 이상한 식이 써있지만 내가해야할건
치환 아니면 부분적분이다. "

라 했었습니다.
하도 강조한거라, 제가 뭘 강조하는지는 알껍니다.

이번에 몇 번 문제로 나올진 모르지만
(시시하게 출제할수도) 하여간,
사고과정은 반드시 정립하고 가시길.

★정적분이네? 계산으로 해봐야겠다. >> 적분한번해볼까?
안되네? >> 그럼 부분적분 치환적분.

+ 만약 부분적분과 치환적분으로 마음먹었는데,
문제에서 "조건"이 주어져있다면 부분& 치환 과정중에
어떻게든 쓰일겁니다.

즉, 어떤 정적분식을 봤을 때 내가 해야할 사고과정은,

단순적분>치환&부분>조건활용

가 되겠습니다.

★iv) 적분의 넓이 해석

여긴 뭐였냐면, 원래 적분이란게 "값" 인데,
적분 자체를 어떤 식 연산의 결과(계산)가 아닌,
그래프로 둘러싸인 넓이. 로 해석하는 거였습니다.

교과과정내에서의 넓이는 총 두가지.

1. 곡선과 x축으로 둘러싸인 넓이
2. 곡선과 곡선으로 둘러싸인 넓이

사실상 2번이랑 1번은 같은 내용 이라 했었습니다.
한 곡선 자체가 x축으로 해석하면 되었기 때문에..

그래서 2번 식만 보면,
내가 아는 식은 오직!!

$\int_a^b f(x)-g(x)dx$ 였습니다.

구성요소는,

1. 어디부터 어디까지 둘러싸였는지 ($a \sim b$)
2. 무엇과 무엇으로 둘러싸였는지 ($f(x), g(x)$파악)
3. 무엇이 위에 있는지 (f(x)-g(x) // g(x)-f(x))

이였습니다.

넓이 문항에서의 중요한 사고과정은,

1. 이 문항이 넓이로 접근해야 하는것인지를 파악.
2. 넓이로 해석하고자 한다면, 구성요소 3가지를
   무조건 파악.

이었습니다!

그래서 이제, 이것을 ii) 과정과 합산하면 다음과
같은 사고과정이 등장합니다.

1. 적분식발견.
2. 계산인가? 해서 바로 적분하려니깐 안됨.
3. 그러면, 부분적분이나 치환적분 시도.
4. 안됨. 조건이나 파악
5. 있다면 조건 활용해서 답을 냈음. 축하.
5'. 안된다면, > 넓이로 접근해야함을 그제서야 인식하고
   접근(90%로 그래프를 그려야한다. 10%는 대칭성)
6. 구성요소 3가지 파악.

머릿속으로 1,2초 내외로 삭 진행되야할 사고과정입니다.

적분이 어렵게 출제된다면, 어려워서가 아니라
대다수가 "5.조건활용" 에 대한 이해가 부족해서이고,
그것도 아니라면 그냥 치환적분인건 알겠는데 단순히 무진
장 어려운 경우입니다.

이런건 연습을 많이 해야죠뭐.

확률과 통계

경우의 수

조합, 순열, 분할 이전에, 올해부터 "경우의 수 "기초를 함께 배웁니다.

즉, "합의 법칙" 과 "곱의 법칙"입니다.

이건 뒤에 확률에서 자세히 소개했으니, 그쪽을 자세히 읽어보시고, 여튼 그렇기 때문에 올해에는 더더욱 합의 법칙과 곱의 법칙을 출제하려고 기를 쓸겁니다.

나누세요. 무조건.

본론으로 들어가보겠습니다.

조합과 순열부터 얘기하자면, 조합은 순서가 없었고,
순열은 순서가 있었습니다.

그래서 조합을 쓰냐 순열을 쓰냐는 순서 유무에서
많이 나뉩니다. 첨언하자면, **"순서"는**
"연속적인"혹은 "동시에 가능" 으로 이해하면 좋습니다.

고난도 경우의 수에선, 문제를 다 "해석"하고
난 뒤에 어떤 식을 적용할까가 정말 중요한 과정으로 작용하는데, 이때에 조합/순열/분할 에 대한 이해가 핵심이 됩니다.

조합부터 얘기해보죠.

조합.

조합에서 중복조합은 오로지 두가지로만 해석합니다.

★★★ i) $x+y+z=n$

여기서 n 은 "총 합"으로 해석합니다.
그래서 항상 중복조합 문항인지가 파악되면,
그리고 i)의 풀이로 푸는 것이 확인되면,
저 n이 무엇인지에 항상 초점을 맞춰야합니다.

만약 10개의 공을 4개의 바구니에 넣는다면,
4개의 바구니에 들어가는 공의 "총합"이 10개 니깐,
$x+y+z+w=10$, ${}_4H_{10}$이 됩니다.

또한, ${}_4H_{10}$여기서, "4" 는 "종류, 즉 서로다른 것"이 되겠고, "10" 은 총합이 됩니다.
그래서 "서로 다른 4명에게 모두 같은 총 합 10개를 준다." 라는 의미가 생기게 되는 것이죠. 중요합니다.
같은 것을, 다른것에게.

★★★ ii) 함수의 개수

함수의 개수는, 다음과 같은 3가지의 단서가
있을 때 사용합니다.

1. 필요개수 (정의역)
2. 후보.
3. 조건.

많이 해서 기억나죠?

이쪽이 어려운 이유는, 저 3가지의 단서를 보고 반응을 못해서 입니다..

경우의 수에서 필요한 사고과정을 정리하면,

1. 어 경우의수? 해석해보자.
2. 중복조합이네. i) 일까 ii) 일까?
3. i) 이네. 총합은?

3'. 총합은 아닌것같고... 조건있고..후보도.. 아ii)이다!

참 쉽죠?

순열.

순열은 순서, 동시성이 강조 되는 것이기 때문에, 다음과 같은 그림을 그려놓고 가는 것이 편하다 했습니다.

그러면 첫 번째/ 두 번째 / … / 여섯 번째 이렇게 되겠고 혹은 동시에 일어나는 6가지 사건 의 경우의 수를 구할 수 있겠죠.

중복순열도 마찬가지가 됩니다.

라고 수업 때 했었습니다.

이건 그냥 풀 때 그렇게 풀 수 있다는 것이고,
중요한건 해석이겠죠.

순열 중에서도 중복순열은,
“서로 다른 것”이 “서로 다른 것”으로 들어갑니다.

즉, 중복조합은 “같은 것” 이 “서로 다른 것” 이고
중복순열은 “서로 다른 것”이 “서로 같은 것” 이 됩니다.

가장 많이드는 예시가 편지와 우체통이죠.
서로 다른 5개의 편지를 서로 다른 3개의 우체통에 넣는 방법은 3^5입니다. 편지가 어디로 들어갈지 고민해야하고 고민할 수 있는 경우는 3가지 인데 편지는 총 5개니 고민을 5번 하는거죠.

그런데 만약 편지가 모두 같은 편지가 된다면, 답은 ${}_3H_5$가 될겁니다.

그럼 여기서 조금 응용하자면, 분할과 직접연계가 가능합니다. 편지 5개를 3개의 우체통에 넣는 경우는,

편지 5개가 1개의 우체통에 가거나, 2개의 우체통에 가거나 3개의 우체통이 가는 경운데,

이것은 각각 **분할 + 조이름 붙이기**로 이해할 수 있습니다. 즉 “서로 다른 구슬 5개를 서로 다른 3개의 묶음으로 나누는 경우를 구하시오.” 한다 해서 무조건 우왕 분할! 이 아니라는 얘기가 됩니다.

정리하면,

같은 것을 서로 다른 것에게 → 중복조합.
같은 것을 나누고 같은 것으로 인식 → 자연수 분할
다른 것을 서로 다른 것에게 →중복순열 & 분할(조짜기)
다른 것을 나누고 같은 것으로 인식 →집합의 분할

이 됩니다.

해석은 이정도지만, 결국은 그 어느 파트보다 많은 문제풀이로 체화시켜야 하는 부분입니다.

확률

경우의 수나 확률에서의 "기본" 부터 짚고 가보겠습니다.

- ✓ 합의 법칙 : 두 사건이 동시에 일어나지 않을 때
- ✓ 곱의 법칙 : 두 사건이 동시에 일어날 때
- ✓ 여사건 : 구하려 하는 것이 **"복잡할 때"** 활용(+적어도)

합의 법칙과 곱의 법칙에서의 **전제**는 무엇이었죠?
전제는, 둘다 "최소 두 사건" 즉 한사건이 아닌
여러사건이 일어날 때 발생한다는 것입니다.

즉, 여러사건은 무조건 동시에 일어나거나 그러지 않으므로 합의 법칙이 쓰이거나 곱의 법칙이 **무조건 쓰이는 것**을 알 수 있습니다.

그러므로, 합의법칙과 곱의법칙을 출제해야하는 출제자의 입장에선, 최소 두 개의 사건을 문제에 깔 수 밖에 없습니다.

해서, 수험생분들은

항상

1. 사건이 여러개인가?
2. 그렇다면 합인가 곱인가.

를 따지셔야 하고, 복잡한 확률이나 경우의 수 문항에선

1. 사건이 여러개인가?

하는 것이 정말 중요하다고 정~말 중요하다고 했습니다.
웬만한 문항들은,

한번에 안풀린다(=복잡하다) = 사건이 여러개다.

하고 그렇게!!!!! 강조했습니다.

절대 잊지 말것.

그리고 여사건은, 꽤 자주나오는 것인데,
마치 이차곡선에서 "정의활용" 급으로 자주 나옵니다.

마찬가지로 이 "여사건"도 의식하에 두고 있어야 하고,

다음과 같은 사고과정이 문항푸는데에 적용되어야 합니다.

1. 구하고자 하는것을 구할라 했더니 복잡하네?
2. 그렇담 사건이 여러갠가?
3. 음 그렇구나.
4. 근데 너무 많네? (=복잡하네?)
5. 그럼 여사건으로 가볼까?

물론.

확률이네? 여사건인가 보자. 맞네 ㅇㅇ

해도 상관은 없습니다..

자 이제 기본적인 건 짚었고, 확률에 대한 본격적인
이야기를 해보려 합니다.

확률은 항상 모든 문항을 두가지로 접근합니다.(큰틀에서)

1. 확률 = $\dfrac{\text{사건}A\text{의 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$

2. 확률 = 확률 × 확률 × 확률 ....

1번으로 갈거면 맘편히 사건A에 해당하는 경우의 수를 세고 그걸 전체로 나눠주면 됩니다.

2번으로 갈거면 여러사건에서 각각의 확률을 구해서 곱해주면 됩니다.

어떤 것은 1번이 편하고. 어떤건 2번이 훨씬 편합니다.

둘 다로 모든 문항을 각기 다 풀수 있으면 아주 좋습니다. 하나론 풀고 하나론 검토하면 참 좋거든요.

하지만 확률단원은 저 둘로 모든 문제에 적용하기가
힘든편이라(경우의 수가 편하고 확률곱은 까다로운)

되는 걸로 그때그때 풀어주면서 두개의 실력을 모두 키우는수뿐이 없습니다.

+ 경우의 수로 접근할 때의 핵심.

1. $\frac{\text{사건 } A \text{의 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$ 로 갈거면, 분모에 적용된 것이 <u>그대로 분자에 적용</u>되어야 합니다.

가령, 분모에는 “순서”의 개념을 적용시켰는데, 분자에선 “순서”의 개념을 빼먹는 경우가 있습니다.

ex) 주사위 두 개 던져서 나온 수의 곱이 4일 확률?

> 전체 경우의 수 = 6×6
곱이 4인 경우의 수 = (1,4) (2,2) (4,1) = 3개
> $\frac{3}{36}$.

전체 경우의 수에선 6×6이라는 <u>순서</u>를 부여했습니다.
(1,1) ,(1,2) , … (6,6)

그런데 만약 곱이 4가되려면 1,4 랑 2,2 네 해서 2개. 라고 해버리면 이건 순서를 고려안한 “조합”에 의미가 됩니다.

그러므로 답은 틀리겠죠.

마찬가지로, 분모에는 조합에 의미, 즉 순서를 없애고
분자에는 순서에 의미를 넣어버리면 안됩니다.

헷갈리지 않게, 수업자료 복습 많이하면서 학습하세요.

2.
<u>“경우의 수 단원에서의 경우의 수와 확률에서의 경우의 수는 다르다.”</u>

배웠으니깐 다알죠. 하나만 알면 됩니다.

<u>“다 다른거다.”</u>

분자에서의 경우의 수를 구할 때 흰공4개 중 2개 뽑는 경우? 하면 ${}_4C_2$라 합니다. 이 뜻은 “네 개의 종류”에서 “두개를 뽑는다.” 이기 때문에 흰 공 4개를 서로 다른 것으로 보겠다는 것이 되죠.

대부분 이것내에서 다 해결이 되고,
어렵게 나오면 무조건 다음과 같을 겁니다.

<u>처음보는 상황이 등장.</u>

반박할 수가 없습니다. 지금껏 모든 고난도 문항들은 여기서 출제가 되었고, 만약 6월에도 (설마?) 고난도로 출제가 된다면 이쪽에서 출제가 될 것이죠.

처음보는 상황은 무조건 문제가 어려운데, 왜냐하면
일단 그 상황을 이해를 해야하기 때문입니다.

그 다음에 이해한 것을 바탕으로 식을 세워야 할텐데,
이것도 만만치가 않고, 일단 다떠나서 “확률고난도”라는 압박 때문에 갈팔질팡할 겁니다. 뭔가를 빼놓아서
틀리거나 하겠죠.

그래도 풀이과정은, 일관됩니다.

새로운 상황 등장

□

**문제에서 “예”를 들었다면,
꼭 활용.**

□

**이것저것 “시도”해보면서
문제 상황 이해하기**

□

“경우가 나뉘거나/ 여사건이거나 / 내가 배운 조합,순열,분할 중 하나 이거나/ 중복되는게 있지는 않는지“ 등을 염두하며 이해를 시도한다.

□

100% 염두한 것에서 하나 걸릴 것이고, 그럼 식도출해서 풀자.

수업 때 좀 더 자세히 강조하겠습니다.

남은건 한가지네요.

조건부확률

조건부 확률은, "아 이게 조건부를 써야겠구나" 만 파악하시면 쉽습니다.

조건부확률은 항상 " ~했을 때, ~할 확률? "처럼 **"조건"지어 놓는 경우**가 99%입니다.

그럼 구하고자 하는 확률은,
분모 $\rightarrow$ "조건을 만족하는 A, B, C사건"
분자 $\rightarrow$ " A, B, C중 구하라는 것을 만족하는 사건이 되어

$\dfrac{A}{A+B+C}$ 구조를 띄는 확률이 답이 됩니다.

물론 분자에 두 개가 올 수도 있으니 정확히 상황을 이해하여 접근하는 것이 중요합니다.

통계

일단, 배운 통계 개념을 표로 나타내보죠.

1단원 : 확률분포

이산확률변수

- 확률분포표
(확률질량함수)

연속확률변수

- 확률밀도함수(그래프)

이항분포
$\mathrm{B}(n, p)$

정규분포
$\mathrm{N}(m, \sigma^2)$

2단원 : 통계적추정

모집단과 표본

모평균 & 표본평균 & 표본피율

모평균의 추정

- $95\% : \overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $99\% : \overline{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모비율의 추정

- $95\% : \hat{p} - 1.96\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{n} \leq p \leq \hat{p} + 1.96\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{n}$
- $99\% : \hat{p} - 2.58\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{n} \leq p \leq \hat{p} + 2.58\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{n}$

1단원 : 확률분포

여기선 크게 두가지로 나뉩니다.

1. 이산확률변수 & 2. 연속확률변수.

각각을 짚어보죠.

1.이산확률변수

- 이산확률변수는 말그대로 확률변수가 연속적이지 않고 이산적인 것을 말했죠. 그러기 때문에 어떤 이산확률변수의 "확률분포"를 보여주려면 당연히 "표"를 활용해야하기 때문에, **"이산확률변수" = "표"** 라고 생각하면 됩니다.

때문에, "표"가 무조건 나오고, "표"가 없으면
"표를 그려라" 라고 했습니다.

✓표가 주어진 문항들은, 교과서에서 배웠던 개념을 묻는다 했었죠.

1. 확률의 총합은 1
2. 평균/분산/표준편차 의 정의와 연산.

✓표를 그리게끔 출제하는 유형은 크게 두가지가 있었죠.

1. 확률질량함수를 줌.
2. 각 확률변수의 확률들을 "직접"구해야 함

해서 표를 완성 후에 마찬가지로 구하라고 하는 것을 연산해 주면 됩니다.

1-1.이산확률변수 中 이항분포.

이항분포는 $\mathrm{B}(n, p)$이고, 여기서 n은 시행횟수, p는 사건이 일어날 확률이 었습니다. 즉, 시행을 n번 했을 때 "몇번"일어났는가를 확률변수로 보았을 때의 그 확률변수의 확률분포를 따로 "이항분포" 라 이름지어 준 겁니다.

중요한 것만 정리해보죠. (다음장에서)

1. 이항분포의 평균과 분산 $(np\,/\,npq)$

2. 이항분포도 결국 이산확률변수이므로 이산확률변수의 공식들 그대로 적용가능
(ex). $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

3. 확률 구할 줄 알아야함.
(ex) $n = 3$, $p = \frac{1}{3}$ 일 때, $P(X = 2)$?
$\rightarrow {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1$

2. 연속확률변수

연속확률변수들의 확률분포를 보여주기 위해선, 그래프가 필요합니다.(연속적이므로 표로는 불가)

중요한 것들을 보죠.

<u>1. 넓이 = 확률★★★</u>
2. 확률의 총합은 1이므로, 넓이 총합 = 1
3. 넓이계산에서 적분x, 즉 확률밀도함수는 직선만 가능.

2-1. 연속확률변수 中 정규분포

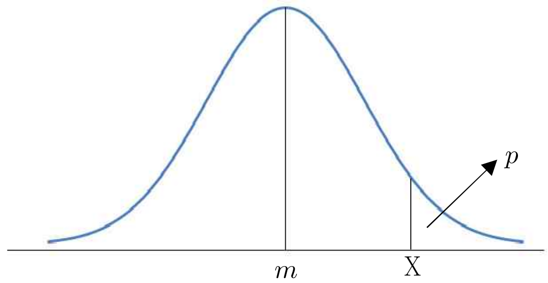
연속확률변수 그 자체보다는 일부인 정규분포가 아무래도 훨씬 중요합니다. 정리해보죠.

정규분포는 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$라고 표기합니다. 즉, m과 σ만 있으면 정규분포가 정의된다는 것이므로 m과 σ이 정규분포의 무엇을 결정하는지가 중요합니다.

1. m - 위치 / σ - 모양
2. 정규분포도 연속확률변수의 일종이므로, 연속확률변수의 모든 성질이 적용됨 (넓이 = 확률)
3. 정규분포의 3가지 정보 중 하나를 물어봄.

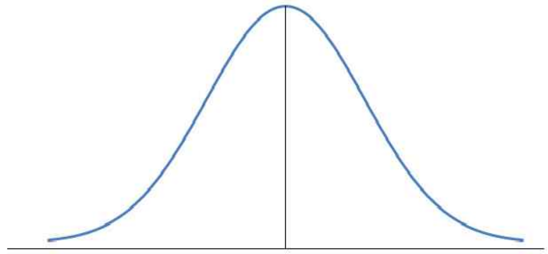
3가지 정보가 뭐였죠?
i) 확률
ii) 평균
iii) X값

또한 그 정보의 값을 구하기 위해선 반드시 표준정규분포를 구해야 한다(표준화) 했었습니다.



정규분포

표준화



표준정규분포

++ 표본평균 과 표본비율 모두 정규분포를 따르므로 표준화 하는 문제로 출제됩니다.

2단원 : 통계적 추정

여기선 용어정리가 정말 중요합니다. 수업 때 했던 정리를 한번만 해보죠.

모집단

= 전체집단
= 평균 → 모평균m / 분산 → 모분산 $V(X)$ /

표본

= 모집단의 일부
= 평균 → 표본평균$\overline{X}$
= 분산 → 표본분산
= 표준편차 → 표본표준편차

*표본의 크기 : n
(한 표본에 들어있는 대상 수)

목적은 "모평균을 구하는 것"인데, 한 개의 표본에서 구한 "표본평균"은 절대 모평균과 같지 않다 했습니다.

왜냐면, 표본을 만들면 만들때마다 표본평균도 하나씩 만들어지는데 (하나의 표본엔 하나의 표본평균 존재하므로) 표본이 어떻게 뽑히냐에 따라 평균도 달라질 수 있기 때문입니다.

해서, <u>**표본평균도 "확률변수" 가 되어서, 정규분포를 따르므로 전 페이지에서 본 표준화 문제로 출제됩니다.**</u>
<u>(출제패턴 1)</u>

어찌됐든 모평균을 구하기 위해선 표본이 여러개 필요하고, 많은 표본평균들을 모아 평균내면
"표본평균(들)의 평균"을 구할 수 있고, 이것이 모평균과 같은 값을 갖습니다.

그런데 만약 표본평균이 1개 밖에 없다면, 모평균을 "절대" 구할 수 없고, 하지만 구하기는 해야하므로
<u>"추정"을 합니다.(출제패턴 2)</u>

이것이 모평균의 추정입니다.

밑줄그은 두 형태로 밖에 출제가 안된다 했었습니다.

공식은 각자 다시 정리해보면 됩니다.

++ 모비율도 마찬가지 논리로 진행됩니다.

기하와 벡터

이차곡선

알겠지만, 이차곡선은 총 세개죠? 포물선, 타원, 쌍곡선.

그런데 여기서 중요한건, 95%가 정의로 풀린다. 였습니다.

하지만 수업 때, 그걸로는 절대 끝까지 풀릴 수 없다했었고, 정의 활용후에 풀이가 여러가지로 나뉜다 했었습니다.

but, 그 여러가지 풀이도 결국 거기서 거기고,

대표적인 풀이는 다음과 같습니다.

1. 닮음
2. 직각삼각형 > 피타고라스 , 특수각
3. ~~직각삼각형 아닌 삼각형 > 제2코사인~~
4. 원이 등장 (혹은 원을 숨겨놓음)
5. 좌표 도입

솔직히 말해서,
1번닮음풀이! 하면 기출에서의 어떤문항이었는지,
2번 직각삼각형등장하면 해야할 풀이! 하면
기출에서 어떤 문항이었는지가 다 기억나면 좋겠습니다.

좋겠습니다가 아니라 그래야합니다.

but. 이런 풀이가 가능하려면 그 전에 반드시 선행되어야 할 행동이 있었습니다.

그것은 바로,

★★★ 정의구현 ★★★

결국은 이차곡선의 정의로 풀리니깐, 그 정의를 문제 보자마자 구현해놓고 시작한다 였습니다.

3개의 이차곡선의 정의는 모두,
"이차곡선 위에 점A에서 ~"
하면서 시작됩니다.

즉, 어떤 이차곡선이 출제되든, 그 이차곡선위에
점이 있으면 "옳지"하면서 초점과 이은 뒤에,

포물선은 그 점에서 준선에 수선
타원은 나머지 초점과도 이어주고
쌍곡선도 나머지 초점과도 이어준 뒤

각각의 성질을 "무조건" 활용하는 겁니다.

이유는 간단해요. 배운게 그거니깐.

즉, 어차피 저건 무조건. 무조건 내야하니깐
풀이에 없을 수가 없으니깐, 제발 "미리!!" 해놓고 들어가야 한다는 겁니다.

자꾸 잊지말아야할것이,
" 니 이거배웠는데 어디 한번 잘 배웠나 내가 test해보겠음" 하는것이 모의고사이고 수능입니다.

여러분이 30번 풀다가 도저히 풀이가 진행이 안되면,
내가 배운게 뭐고 이건 뭘묻는거지
하고 머릿속에서 회전해야합니다.

여러분이 30번풀다가 막혀서 하는 그 풀이는
99% 헛소리 풀이이고,
여러분이 설마?하면서 긋는 그 보조선은
99% 헛선(?) 일 것입니다.

문제풀 때 고민하라는것은, 배운내에서의
사고깊이를 키우라는 의미지

상상력과 창의력을 키우는게 아닙니다.

(사실 이래서 수능이 참된 뇌 키우기로는
참 부적합하다 생각하나 여기선 논외. 이야기가 산으로..)

평면벡터

★1) 벡터의 합 + 내적

벡터의 합이나 내적의 "최대, 최소"를 묻는 문항입니다.

이럴땐 다음과 같은 세 가지의 도구를 적절히 활용한다고 했습니다.

1. 평행이동 2. 합성 3. 분해

이 세가지는, 벡터의 합과 내적의 최대최소를 좀 더 "쉽게" 구하기 위함으로, 반드시 이럴땐 이렇게 해라 라는 것은 딱히 없었습니다만,

문제를 풀다보면 여러분도 느꼈다시피 "원이 나오면 원의 중심을 활용해서 분해한다" 같은 자주쓰이는게 있기 마련입니다. 그런것들은 스스로 문제풀면서 몸에 익히고 해야하는것이였으니, 따로 정리는 안하겠습니다.

다시말하지만, 문제상황에 따라 내가 분해할지 합성할지 평행이동할지를 달라지는 것이기에, 유형분류의 의미가 없어지게 됩니다.

재재작년 9월평가원 벡터문항에서도, 사실 분해를 저처럼 삼각형의 꼭지점을 이용해서 분해한 수험생은 몇 없었습니다. 그건 결국 **"저 세가지를 도구로써 반드시 활용한다"** 라는 인지자체가 부족했던것이고 (왜냐면 문제가 살짝 까다롭게 나오니깐 **웬지 저걸로 푸는 것이 아닌 다른 것으로 푸는 것같아서** - 대표적인 체화덜됨의 예) 또한 인지가 됐다 한들 몸에 덜붙었으니 바로바로 적용이 안되는 것입니다.

이 쪽 순수벡터 파트는, 그냥 저 세가지 도구가 있구나 ㅇㅇ
한 뒤에 모든 순수벡터문항을 저 세가지로 풀어내는
연습을 주구장창해주면 됩니다. 좌표잡지 말구요. 제발.

물론, 다음과 같은 얘기는 했었습니다.

✓$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

= 점A와 점B, C의 중점을 지나는 벡터로 해석

✓두 벡터 내적이 일정 > 만족하는 벡터는 수만가지.

✓ 분해할 땐 꼭지점 등 의미있는 점 활용

…

공간도형

✓ 직선과 직선이 이루는 각.

→ **<u>교점있을 때</u>** 두 직선이 이루는 각.

✓ 직선과 평면이 이루는 각.

→ **<u>교점있을 때,</u>** 직선 위의 점에서 평면에서 수선내려서 직각삼각형만들었을 때, 그 각도.

✓ 평면과 평면이 이루는 각

→ **<u>교선 만든 뒤</u>** 삼수선 활용.
(교선 없으면 평행이동 같은 여러가지 행동 취해야함.)
→ $\cos\theta = \frac{S}{S'}$ (정사영 → 넓이 각각 구해서..)

✓ 삼수선의 정리

→ 떠있는점 , 교선, 바닥평면 체크 후 실행.

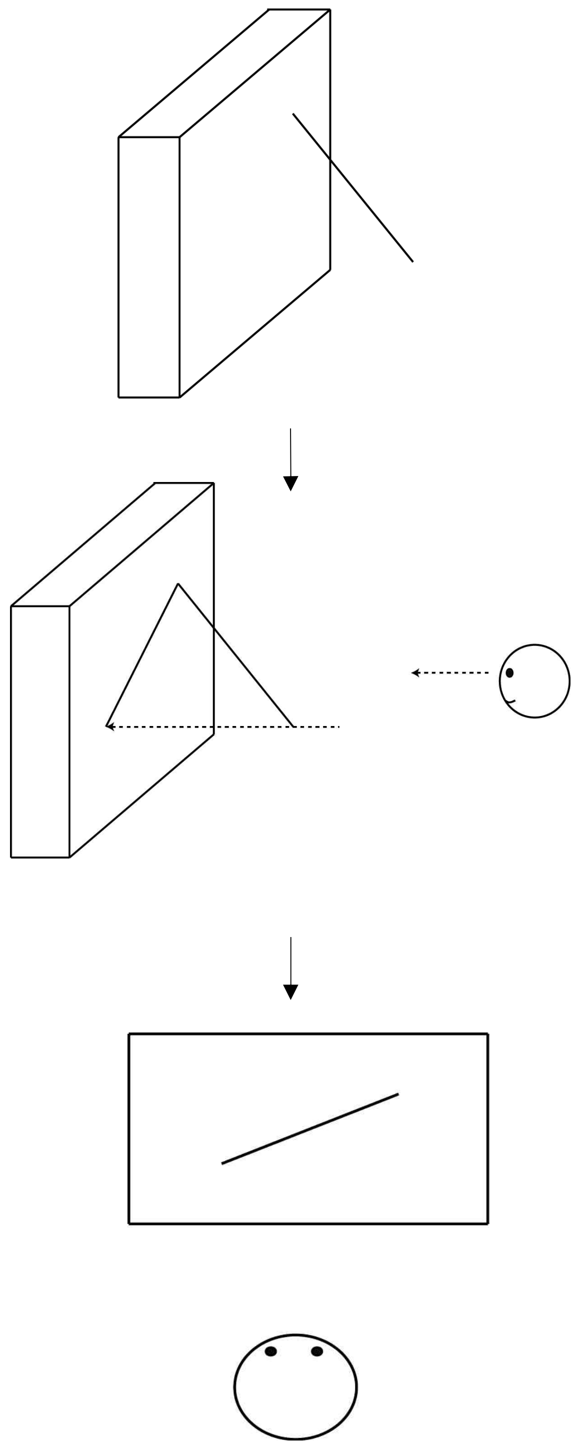
✓ 단면화(3차원공간을 2차원으로 내려 쉽게 이해하고자.)

Ⅰ. 단면자르기.

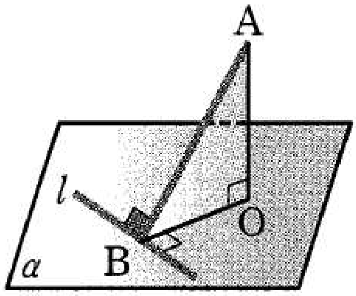
→ 입체를 잘라 단면으로 봄.
→ 자르는 평면에 여러가지 요소가 포함되어있을 때 활용.

Ⅱ. 투영.

→ 입체를 어떠한 방향에서 봤을 때 보이는 모습을 단면으로 떼어냄.
→ 정사영과 똑같은 개념. 어떠한 방향에서 햇빛을 비췄을 때 벽에 생기는 그림자를 따로 뗌.



★★★삼수선의 정리



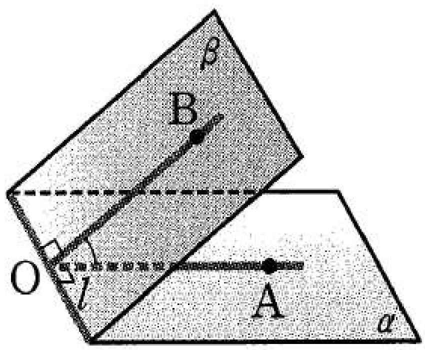
★★★★무조건 3가지만 확인

1. 떠있는 점 : A

2. 교선 : l

3. 바닥평면 : α

□ 이면각.



이면각은, 각 평면에서 교선에 내린 두 수선이 이루는 각이다.

즉, 이면각을 구하려면 반드시 교선 이 있어야 한다.

없다면? → 평행이동 (평면연장, 평행이동 등등)

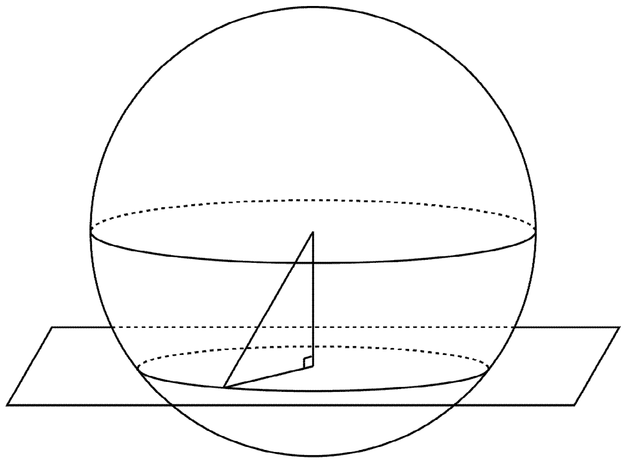
★구가 등장했을 때...

1.구 위의 점과 구의 중심을 잇고 그 길이는 반지름이라는 것을 꼭 활용

2.구가 외접하거나 내접하면 → 중심과 중심을 잇자.

3. 구가 평면이나 직선에 의해 잘리면

→ 구의 중심에서 평면에 내린 수선은 단면인 원의 중심.
→ 1. 구의 반지름 / 2. 원의 반지름
/ 3. 구의 중심~원의 중심까지 거리 3개의 정보 중 1개의 정보를 꼭 물어봄. (그림참고)



공간좌표

<모든 공식들>

1. 점

- 점의 좌표

2. 직선

- 직선의 방정식 : 방향벡터와 지나는 한 점 / 두 점
- 직선 위의 점을 좌표로 표시가능(t활용)

3. 평면

- 평면의 방정식 : 법선벡터와 지나는 한 점 / or 두 점이 있으면 법선벡터 만듦.
- 평면 위 점은 직선 위 점과 다르게 좌표로 표시 x

4. 점 & 점

- 점과 점사이의 거리
- 내분점 & 외분점

5. 점 & 직선

- 점과 직선사이의 거리 (직선 위의 점을 좌표로 표시 후 점과 점사이의 거리공식 활용)
- 점이 직선 위에 존재하는지 확인.

6. 점 & 평면

- 점과 평면사이의 거리
- 점이 평면 위에 존재하는지 확인.

7. 직선 & 직선

- 직선과 직선이 이루는 각
- 직선과 직선사이의 거리(거의 출제x)

8. 직선 & 평면

- 직선과 평면이 만나는 점의 좌표
- 직선과 평면이 이루는 각
- 직선 위 점과 평면 사이의 거리

9. 평면 & 평면

- 평면과 평면사이의 거리 (평행할 때) : 점과 점사이 거리공식 활용
- 평면과 평면이 이루는 각
- 두 평면이 만나서생기는 교선의 “방정식” (미비하나 출제 될 수 있긴함)

총정리 : 결국 공간좌표개념은 “관계”따지는 공식들이므로, 따질 수 있는 관계는 **★★★“모두 따져놓고”** 시작할 것. 제발.

수학은, 실전이다

개념을 배웠더라도, 그 개념을 문제에 접목시켜 실질적으로 문제를 풀 수 없으면
아무런 의미가 없습니다. 이미 배웠던 개념을 문제에 적용시키는 사고훈련을 다양한
문제를 풀면서 익혀야 합니다. 수능에 나오는 유형에 대한 실질적인 해결방법을 토대로 수업이 진행됩니다.

홍현빈 서울대학교 공과대학/ 조선일보 맛있는공부 인터뷰 / Bin모의고사 저자 / 수만휘 기출문제집 공동저자

수능수학, 홍현빈

수학은, 실전이다

www.홍현빈.com