2017학년도 6월 홍현빈 모의고사

수학 영역
(가 형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

아무렇지 않은 척

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

Bin

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 방정식 $2^{x+2}=8$일 때, x의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=8e^{2x}+\sin x$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

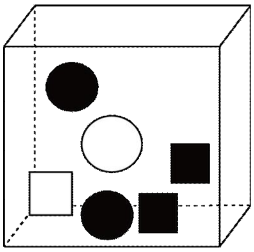
3. ${}_6C_n=20$을 만족시키는 n의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 포물선 $y^2=4px$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$이 같은 초점을 공유할 때, 가능한 상수 p의 값의 곱은? [3점]

① -9 ② -16 ③ -25 ④ -36 ⑤ -49

5. 다음 그림과 같이 상자에 6개의 도형 장난감이 들어있다. 상자에서 임의로 한 개를 뽑은 것이 검은 색 장난감일 때, 그 도형 장난감이 네모일 확률은?(단, 뽑을 때 장난감의 크기와 모양은 고려하지 않는다.)〔3점〕



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

sol)

조건부확률. $\frac{\text{검은색 네모}}{\text{검은색 네모} + \text{검은색 동그라미}} = \frac{2}{4}$

6. 함수 $f(x)=\sin(ax)$ $(0<a<10)$가 모든 실수 x에 대하여 $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$가 되게 하는 모든 상수 a값의 합은?〔3점〕

① 4 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

sol)

그래프를 그려봐도 되고, 수식으로 해결해도 된다.

이해가 편하게 수식으로 해설해보자.

$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$는 $\sin\left(ax-\frac{a\pi}{2}\right)$이고 이것은 $\sin(ax)$를 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동 한 것이다. $\sin(ax)$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$라서,

$\sin\left(ax-\frac{a\pi}{2}\right)=\sin(ax)$가 되려면 평행이동할 $\frac{\pi}{2}$는 주기의 정수배가 되어야한다. 즉, $\frac{\pi}{2}=k\times\frac{2\pi}{a}$. 정리해주면, $a=4k$

$a=4,8$ 답은 12

7. $\int_1^2 xe^{x-1}dx$의 값은?〔3점〕

① $2e$ ② $2e-1$ ③ $e-2$ ④ $e-1$ ⑤ e

8. 서로 다른 펜 7개를 서로 같은 상자 3개에 나눠 넣을 때, 각 상자에 적어도 2개씩 넣는 경우의 수는? [3점]

① 105 ② 150 ③ 175 ④ 210 ⑤ 315

9. 곡선 $x^2 - y^2 + 2y = xy$ 위의 점 $(2, a)$에서의 접선의 기울기는?(단, $a > 0$이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

10. 좌표평면에서 크기가 같은 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가

$$\begin{cases} |\vec{a} + \vec{b}| = 8 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \end{cases}$$

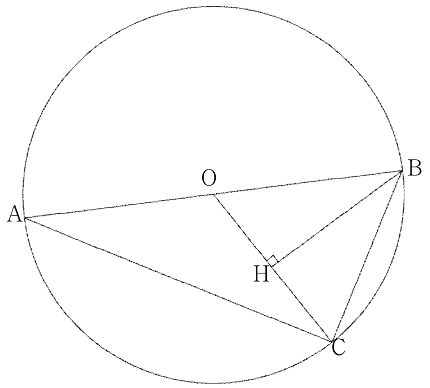
을 만족할 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① 6 ② 9 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

$sol)$ 조건을 만족하는 두 벡터를 그려서 해결하는 방법이 있고, 연산으로 풀 수도 있다. 연산으로 풀어보자.

처음 조건을 제곱하면, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}$
이므로, $64 = x^2 + 28$. $x = |\vec{a} - \vec{b}| = 6$

11. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 $\overline{AB}=10$인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 점 B에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BC}=6$일 때, $\overline{OH}$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

sol)선분AB가 지름이므로, 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
$\angle BAC=\theta$라 하면, $\sin\theta=\frac{3}{5}$이 된다.

원의 성질에 의해 $\angle BOH=2\theta$가 되고, $\overline{OH}=\overline{BO}\cos 2\theta$
$\therefore 5\times\cos(\theta+\theta)=5\times(1-2\sin^2\theta)=$

12. 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$위의 점 $(4, a)$ $(a>0)$에서 그은 접선의 수직이고 원점을 지나는 직선이 점 $(4, b)$를 지난다. 상수 b의 값은?

[3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[13~14] 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{A}(a, b)$ $(b>0)$을 지나고 x축과 y축에 평행한 직선을 각각 그을 때, 이 직선들이 y축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=-2\log_3 x$와 만나는 점을 C라 하자. 13번과 14번의 물음에 답하시오.

13. $\overline{\mathrm{AC}}=6$일 때, 두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① -1 ② -2 ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

14. 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이고, 변 BC는 $(1, 0)$을 지날 때, 곡선 $y=\log_3 x$와 $x=a$, 직선 BC로 둘러싸인 넓이는? [4점]

① $2-\frac{1}{\ln 3}$ ② $2-\frac{2}{\ln 3}$ ③ $3-\frac{2}{\ln 3}$ ④ $4-\frac{2}{\ln 3}$ ⑤ $5-\frac{2}{\ln 3}$

15. 좌표평면 위의 세 점 $A(5,12)$, B, C 에 대하여 점 A에서 점 B까지의 거리와 점 A에서 점 C까지의 거리가 같을 때, $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|$의 최댓값은 25이다. $|\overrightarrow{OB}|$의 최댓값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 25

16. 1부터 9까지 번호가 하나씩 쓰여 있는 9개의 공이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 차례로 공을 3개 뽑고 공에 적힌 번호를 뽑힌 순서대로 a, b, c라 할 때, $a \times b$, c가 모두 3의 배수가 될 확률은? [4점]

$sol)$

c가 $a \times b$보단 간단하므로 c부터 생각해보자.

c가 3의 배수가 되려면 c는 $3, 6, 9$ 중 하나여야 한다.

3개 중 하나택해야 하므로 ${}_3C_1$

이제, 3의 배수는 2개가 남았고, 3의 배수가 아닌 것은 7개가 남았다.

$a \times b$가 3의 배수가 되려면, a, b둘 중 적어도 하나는 3혹은 6혹은 9가 된다. 여사건을 취해주면, a, b둘 다 3의 배수가 아니면 된다.

전체 경우의 수는 8×7, 둘다 3의 배수가 아니려면 6×5

즉, ${}_3C_1 \times (56 - 30) = 78$

분모는 $9 \times 8 \times 7$이므로 답은 $\frac{13}{84}$

① $\frac{13}{84}$ ② $\frac{5}{28}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

17. 곡선 $y=e^x$과 함수 $g(x)=mx+n\ \ (m<0)$이 직선 $x=t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0}\frac{f(t)-2}{t}=-2$이다. $g(2)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$sol)$ ㄴㅇㄹㅇ

$\overline{\mathrm{AB}}=|e^x-mx-n|$이다. $\lim_{t\to0}\frac{f(t)-2}{t}$ 식을 먼저 활용해보자.

분모가 0이고 준식이 수렴하므로, 분자도 0이어야 한다. 즉, $f(0)=2$
그러면, $|1-n|=2$가 되고, 가능한 n값은 3, -1이다.

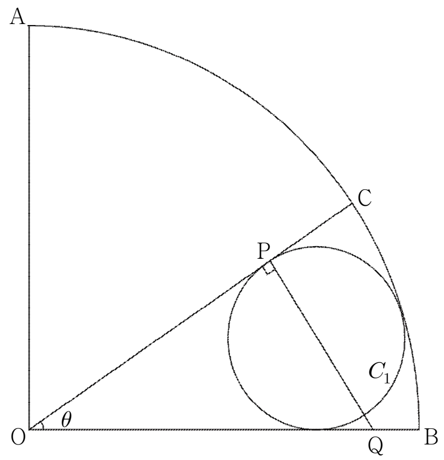
만약 $n=3$이면, $t=0$일 때 $mx+n>e^x$이므로 ($x=0$에서의 직선의 함수값이 곡선보다 위에 있음) $f(t)=-e^t+mt+n$이 된다.
준식에 대입하면,

$\frac{-e^t+mt+1}{t}=-1+m=-2$ 즉 $m=3$이 된다.
그런데 $m<0$이어야 하므로 성립하지 않는다.

$n=-1$이면 반대로 $f(t)=e^t-mt-n$이 된다.
준식에 대입하면,
$\frac{e^t-mt-1}{t}=1-m=-2$즉 $m=-1$이 된다.

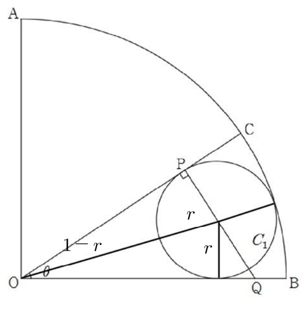
$\therefore g(x)=-x+3,\ g(2)=1$

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle\mathrm{COB}=\theta$가 되도록 호 AB위의 점 C를 잡을 때 원 C_1은 부채꼴과 접하고 선분 OC와 점 P에서 접한다. 점 P에서 선분 OC와 수직인 직선을 그어서 선분 OB와 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$sol)$구하고자 하는 삼각형은 직각삼각형이므로, $\frac{1}{2}\times$밑변 $\times$높이로 접근하자. 해서, $\overline{\mathrm{OP}}$를 구할 생각을 먼저 할 수 있다.
그런데, 주어진 상황은 원밖의 한점 O에서 원에 그은 두 접선으로 해석할 수 있으므로, 점 O와 원C_1의 중심을 잇고 직각삼각형을 만들 생각을 할 수 있다. 또한, 원 C_1이 부채꼴에 내접해있는 상황이므로,
중심 - 중심- 접점은 일직선 상에 있음을 알고있고, 활용해보자.



직각삼각형에서, $\frac{r}{1-r}=\sin\frac{\theta}{2}$ 이므로, $r=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$ 가 된다.

$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\tan\theta$ 이므로, 넓이를 구할 수 있다.

19. $1 \le a \le 3$, $1 \le b \le 3$인 자연수 a, b와 집합 $X:\{1,2,3,4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 모든 a, b에 대하여 $f(a) \times f(b) \le f(4)$를 만족한다. 함수 f의 개수는? (단, $a \neq b$이다.) [4점]

① 10 ② 13 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

객관식 최고 오답률 문항이다.(정답률 20%)

$f(4)$값에 따라 $f(a) \times f(b)$값이 영향을 받으므로, $f(4)$를 기준으로 사건을 나눌 것이다.

1. $f(4)=1$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1)

2. $f(4)=2$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1)

3. $f(4)=3$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) (1,1,3) (1,3,1) (3,1,1)

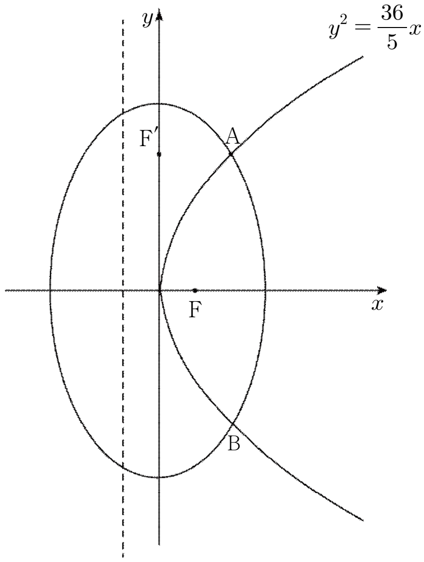
4. $f(4)=4$일 때, $(f(1), f(2), f(3))$으로 가능한 순서쌍 ?

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (2,1,1) (1,1,3) (1,3,1) (3,1,1) (1,1,4)(1,4,1) (4,1,1) (2,2,1) (2,1,2) (1,2,2) (2,2,2)

$\therefore\ 1+4+7+14 = 26$

** 규칙성 따져서 해도 되나 몇 개 빼먹어서 틀린분들을 위해 다 썼습니다.

20. 그림과 같이 타원이 포물선 $y^2 = \frac{36}{5}x$과 두 점 A, B에서 만난다. 포물선 위의 점 A에 대하여 초점 F와 점 A를 이은 선분의 길이가 $\frac{34}{5}$이고, 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선은 타원의 한 초점 F′를 지난다. 점 $P(2\sqrt{10}, a)$가 타원 위의 점일 때, a의 값은?[4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$sol)$사고흐름을 따라가자면, 다음과 같다.
문제에서 "타원 위의 점"의 좌표를 구하라 했으므로 타원의 방정식을 구해 대입해야함을 안다. 타원의 방정식을 구하기 위해선, 장축,단축,초점 중 두 가지 정보가 필요하다.

일단 문제에서, 점 A에서 준선에 내린 수선이 타원의 초점F′를 지난다 했으므로, 점 A의 y좌표는 타원의 초점좌표와 같다. $\overline{AF} = \frac{34}{5}$라는 것과 점 F의 x좌표가 $\frac{9}{5}$라는 것을 활용해서 A의 x좌표를 구해주면 5가 나온다. 그대로 포물선식에 대입하면 A의 y좌표는 6이 된다.

또한, 포물선의 정의 활용을 위해 점 A, 점 F′, F′가 아닌 타원의 초점을 이어주면 직각삼각형이 나온다. 직각삼각형의 높이는 $\overline{AF'}$로, 점 A의 x좌표와 같으므로 $\overline{AF'} = 5$이다. 초점거리는 $6 \times 2 = 12$이므로, 직각삼각형의 빗변길이는 13임을 안다.

타원의 정의에 의하여 $5 + 13 = 2b$, $b = 9$임을 안다. $c = 6$이므로 타원의 식은 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1$이 된다. 이제 점 $P(2\sqrt{10}, a)$를 대입하면 된다.

21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$위의 점 $(t, f(t)e^{-t})$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 $h(t)$라 하자. 함수 $g(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.
> (나) $x \geq 0$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 2이다.

$f(1)$의 값이 정수일 때, $f(1)$의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

sol) ** 풀이가 여러 가지입니다. 그 중 하나일뿐.

접선의 방정식을 세워주면, $y=g'(t)(x-t)+g(t)$ 이고, $y=0$을 대입하면 $\frac{-g(t)}{g'(t)}+t$ 가 x좌표가 되고 즉 $h(t)=\frac{-g(t)}{g'(t)}+t$ 이다.

(가) 조건에 따라서 모든 실수 t에 대하여 $g'(t) \neq 0$이다.
$g'(t)=e^{-x}\times(f(x)-f'(x))$이므로, $f(x) \neq f'(x)$이다.
$f(x)=x^2+ax+b$라 하면, $f'(x)=2x+a$이다.

$f(x) \neq f'(x) = f(x)-f'(x) \neq 0$ 이므로
$x^2+(a-2)x+b-a \neq 0$이다.
그러므로 판별식을 활용해주면,
$(a-2)^2-4b+4a<0$이고, 정리하면
$a^2-4b+4<0$가 된다.

또한, <u>모든 실수 t에 대하여 $g'(t) \neq 0$이다.</u> 라 했으므로
함수 $g(x)$는 감소함수가 된다.
해서, (나) 조건에서 $g(x)$가 최댓값을 갖게하는 x는 0임을 안다.
$g(0)=2$이므로, $f(0)=2$이므로, $b=2$이다.

$\therefore f(x)=x^2+ax+2$ 이고
$a^2-4b+4<0$ 에서 $a^2<4$, $-2<a<2$

$f(1)$은 $a+3$인데, $f(1)$의 최댓값을 물었으므로 $a=1$일 때이다.
답은 4.

++$g(x)$의 그래프 개형을 추론하여 접근하는 방법도 괜찮습니다.

단답형

22. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$일 때, $12\tan\alpha$의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이다.) [3점]

23. $\int_0^1 2x^3e^{x^2}dx$의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(2,4)$, $\mathrm{B}(a,b)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 서로 다른 과자 6개를 학생 A를 포함한 3명에게 남김없이 나눠줄 때, A는 1개 이하의 과자를 받는 경우의 수를 구하시오.(단, 1개도 못 받는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

26. 함수 $f(x) = x^2e^{-x+2}$와 정수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

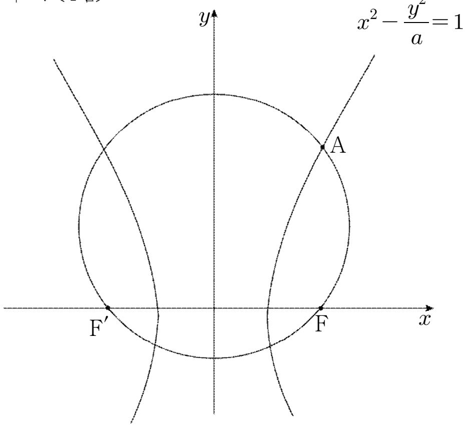
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 불연속함수이다.
(나) 함수 $g(x)$의 치역은 $\{y \mid y \geq -4\}$

t의 최댓값을 k라 할 때, $\dfrac{f(k)}{e^{-k+2}}$의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a}=1$ 위의 x좌표가 양수인 점 A와 쌍곡선의 두 초점 F, F′를 지나는 원이 있다. 원이 선분 AF′를 지름으로 하고 삼각형 AFF′의 넓이가 6일 때, 쌍곡선의 점근선의 방정식을 $y=\pm mx$이다. m^2의 값을 구하시오. [4점]

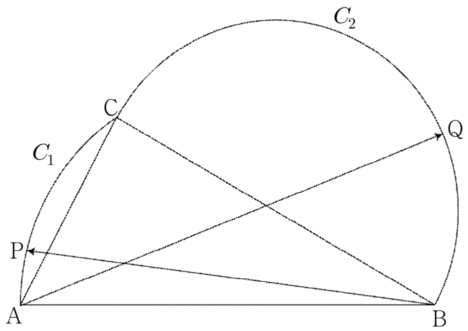


sol)
선분 AF′를 지름으로 하므로 삼각형 AFF′는 직각삼각형이 된다.
그러므로 점 F와 점 A의 x좌표가 같다. 점 F의 x좌표는 $\sqrt{1+a}$ 이고, 대입하며 점 A의 y좌표를 구해주면, a가 된다.

넓이가 6이므로, $a\times\sqrt{1+a}=6$이다. $a=3$

점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}$이므로, $m^2=3$이다.

28. 그림과 같이 직각삼각형 ABC와 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 원의 일부인 C_1위의 임의의 점 P와 선분 BC를 지름으로 하는 반원 C_2위의 임의의 점 Q가 있다. $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{6}$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$가 최대가 되게하는 점 P, Q에 대하여 삼각형 BPQ의 넓이가 $\frac{a\sqrt{b}}{7}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



별도첨부

29. 기홍, 현수, 유지 3명의 학생이 2시, 5시, 8시에 각 1편씩 총 3편의 영화를 관람하려한다. 그림과 같이 상영관은 1,2,3관으로 총 3개의 관이 있고 각 상영관에서는 매시간마다 같은 영화만 상영한다. 예를 들어, 2관에선 오직 B영화만 상영한다. **각 상영관의 정원이 총 2명일 때,** 3명의 학생이 다음 조건에 맞게 3편의 영화를 관람할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 현수는 유지와 함께 영화를 관람 하지 않고, 기홍은 유지와 함께 영화를 관람한다.
(나) 기홍과 유지는 A, B, C 모든 영화를 관람한다.

상영시간표

시간 \ 관	1관	2관	3관
2시	A	B	C
5시	A	B	C
8시	A	B	C

전체 경우의 수는, 2시,5시,8시가 각각 독립이므로, 2시에 영화보는 경우의 수를 구해준 뒤 세 제곱해주면 된다.

1. 2명 / 1명 으로 보는 경우
영화관의 총 정원이 2명이므로, 혼자 볼 학생 정하는 경우의 수 ${}_3C_1$
그 학생이 볼 영화 정하는 경우의 수 ${}_3C_1$ 나머지 둘이 같이 볼 때, 영화 고르는 경우 ${}_2C_1$ 해서 18

2. 3명 모두 다른 영화를 보는 경우
$3! = 6$

$\therefore 18+6 = 24$
해서 총경우의 수는 24^3이다.

이제 분자를 구해보자.

현수를 기준으로 풀어보자. 만약 현수가 2시-5시-8시 로 영화를 AAA 로 보면, 남은 영화는 B, C 뿐이라 (나)조건을 만족할 수 없다. 즉 현수는 ABB 로 두 개만 같은 경우, ABC 로 세 영화 모두 다른 경우로만 영화를 봐야한다. 이제 경우를 나눠 풀어보자.

1. 현수가 ABB꼴로 보는 경우.

ABB 꼴로 보는 경우는 3×2가 된다. (처음영화 고르고 나머지두 영화 중 하나 선택)

그런데 ABB 말고도 BAB, BBA 꼴도 있으므로, $3\times2\times3$이 된다.
또한,
만약 ABB 로 현수가 본다면 기홍과 유지는 현수가 A본 시각에 꼭 B를 봐줘야만 한다. (왜냐면 나머지 두타임엔 현수가 다 B를 봐버리니깐.)
그 후 현수가 B를 볼 때 A -> C 혹은 C -> A 로 보면 된다.

즉! 현수가 ABB 로 보면 기홍유지는 2가지 선택권 뿐이 없다.

$\therefore 3\times2\times3\times2 = 36$

2. 현수가 ABC 꼴로 보는 경우.

그려보면 두가지 밖에 나오질 않는다.(혹은 수형도.)
현수가 ABC를 보는 경우는 3!이므로 12 즉! 둘다 더하면 답은 48.

30. 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $g(x)$와 $f(x)=\frac{x^2}{9}+a\ (a>0)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)=3+\int_{-3}^{x}\frac{g(t)}{f(t)}dt$
(나) $\int_{0}^{3}\{f(x)\}^2g'(x)dx=2$

곡선 $y=g(x)$와 x축, 두 직선 $x=0$, $x=3$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형 일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오. [4점]

sol)결국 필요한 식은 $\int_0^3\{g(x)\}^2dx$이므로 이 식을 끌어내기 위한 과정을 거쳐보자.

(가) 조건 양변을 미분하면, $f'(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ 이다. $f(x)>0$이므로, $f(x)f'(x)=g(x)$가 된다.

(나) 조건에서, $\int_0^3\{f(x)\}^2g'(x)dx$를 부분적분해보자.

$\int_0^3\{f(x)\}^2g'(x)dx$

$=\left[\{f(x)\}^2g(x)\right]_0^3-\int_0^3 2f(x)f'(x)g(x)dx$

$=\{f(3)\}^2g(3)-\{f(0)\}^2g(0)-\int_0^3 2\{g(x)\}^2dx(\because f(x)f'(x)=g(x))$

$=2$

(가) 조건에 $x=-3$을 대입하면, $f(-3)=3$ 이고, y축 대칭인 이차함수이므로 $f(3)=3$이 된다. 또한 $f(-3)=\frac{9}{9}+a$이므로 $a=2$가 된다.
해서, $f(0)=2$가 된다. 또한, $f(x)f'(x)=g(x)$ 이므로
$g(3)=f(3)f'(3)=2$
$g(0)=0$

해서, $\{f(3)\}^2g(3)-\{f(0)\}^2g(0)-\int_0^3 2\{g(x)\}^2dx$

$=18-2\int_0^3\{g(x)\}^2dx=2$

구하고자 하는 $\int_0^3\{g(x)\}^2dx=8$