

5지선다형

1. 좌표공간에서 두 점 $A(-2,3,1), B(0,-1,2)$ 가 있다. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [2점]

- ① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{17}$ ③ 4 ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

2. 좌표공간에서 점 $A(4,-1,1)$ 와 yz 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는? [2점]

- ① $(3,-1,1)$ ② $(2,-1,-1)$ ③ $(-4,1,-1)$
 ④ $(-4,-1,1)$ ⑤ $(4,1,-1)$

3. 좌표공간에서 점 $(6,5,2)$ 와 xy 평면 사이의 거리는? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. $\overline{AB} = 3$ 인 직사각형 $ABCD$ 에서 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ 의 값은? [2점]



- ① 6 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

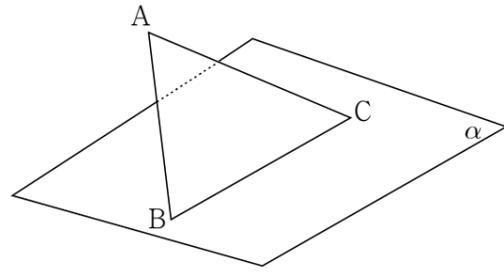
5. 좌표공간에서 평면 $3x + 5y + 4z = 2$ 위의 점 P에서 z 축에 내린 수선의 길이가 3이 되도록 점 P가 움직이고 있다. 점 P의 평면 $2x - y - z = 5$ 위로의 정사영을 Q라 할 때, 점 Q가 나타내는 도형의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{7\pi}{3}$ ② $3\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}\pi$
- ④ $\frac{9\sqrt{6}}{8}\pi$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}\pi$

6. 좌표공간에서 직선 $x = y = z$ 과 직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} = \frac{z}{2}$ 이 서로 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은? [3점]

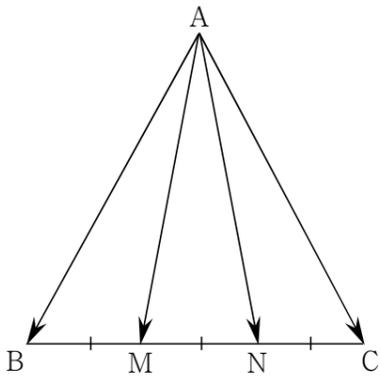
- ① $\frac{3}{17}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{49}{51}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{12}{17}$

7. 그림과 같이 넓이가 8이고 $\overline{BC} = 4$ 인 삼각형 ABC가 평면 α 와 변 BC를 공유하고 있다. 평면 ABC가 평면 α 와 30° 의 각을 이룰 때, 점 A와 평면 α 사이의 거리는? [3점]



- ① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{5}{2}$

8. 정삼각형ABC의 한 변BC를 3등분하는 두 점을 점B와 가까운 점부터 각각 M,N이라 하자. 삼각형ABC가 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 48$ 를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 값은? [3점]

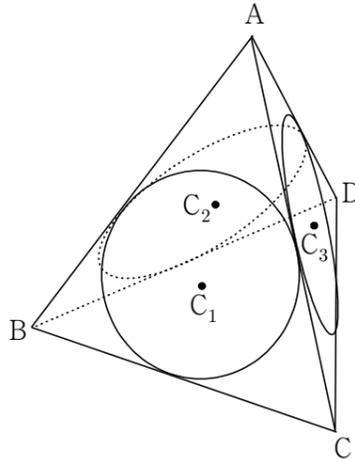


- ① 18 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

9. 좌표공간에서 $x^2 + y^2 + z^2 = 32$ 위의 점P에 대하여 점P에서 평면 $y=6$ 에 내린 수선의 길이가 4를 만족시키도록 점P가 움직일 때, 점P가 나타내는 도형의 길이는? [3점]

- ① $\sqrt{7}\pi$ ② 4π ③ $2\sqrt{7}\pi$ ④ $3\sqrt{2}\pi$ ⑤ $4\sqrt{7}\pi$

10. 그림과 같이 한 모서리 길이가 6인 정사면체ABCD에서 세 삼각형 ABC, ADB, ACD에 각각 내접하는 원의 중심을 각각 C_1, C_2, C_3 라 하자. 두 평면 AC_1C_2, AC_3C_1 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

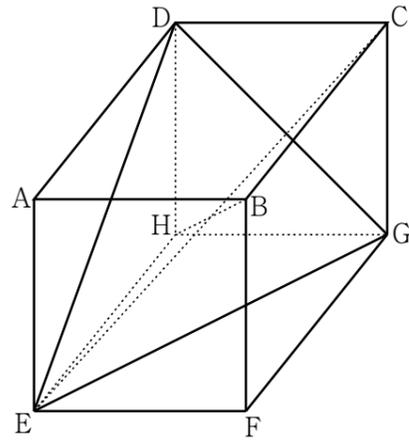


- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{5}{11}$

11. 좌표공간에서 구 $(x-4)^2 + (y-2\sqrt{2})^2 + (z-2\sqrt{10})^2 = 36$ 이 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ 과 만나서 생기는 원의 넓이는? [3점]

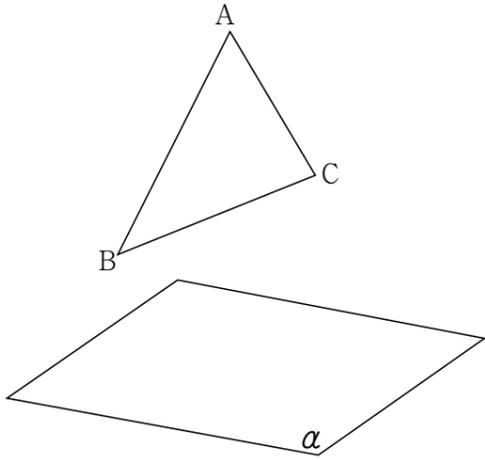
- ① 10π ② 15π ③ 20π ④ 25π ⑤ 30π

12. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{EA} = 5$ 인 직육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 두 선분 BH, CE 가 서로 수직일 때, 사각형 $ABFE$ 의 평면 EDG 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



- ① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

[13~14] 그림과 같이 $\overline{AB}=4$ 인 삼각형ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{14}$ 이고, 변AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 $\sqrt{7}$ 이다. \overline{BC} 의 최솟값을 a 라 할 때, 13번과 14번의 물음에 답하시오.



13. 삼각형ABC의 넓이의 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?
[4점]

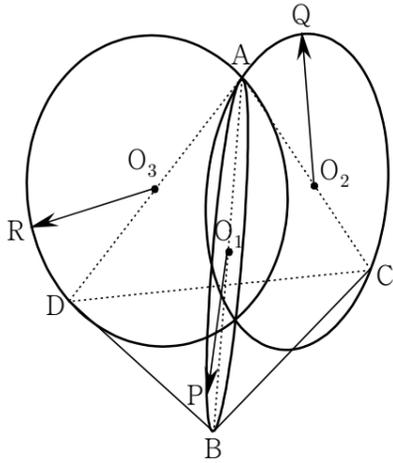
- ① $2\sqrt{2}$
- ② $3\sqrt{2}$
- ③ $4\sqrt{2}$
- ④ $5\sqrt{2}$
- ⑤ $6\sqrt{2}$

14. $\overline{BC}=a$ 일 때, 변CA의 평면 α 위로의 정사영의 길이는? [4점]

- ① $2\sqrt{3}$
- ② $\sqrt{15}$
- ③ 4
- ④ $3\sqrt{2}$
- ⑤ $2\sqrt{5}$

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체ABCD에서 모서리 AB, AC, AD를 각각 지름으로 하는 세 원 C_1, C_2, C_3 가 삼각형BCD의 무게중심G를 지난다. 세 원 C_1, C_2, C_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 라 하고, 원 C_1 위의 점P, 원 C_2 위의 점Q, 원 C_3 위의 점R에 대하여

$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q} + \overrightarrow{O_3R})$ 의 값이 최대가 될 때, 이 때의 삼각형PQR의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



- ① $12\sqrt{3}-16$
- ② $14\sqrt{3}-9$
- ③ $16\sqrt{3}-18$
- ④ $18\sqrt{3}-16$
- ⑤ $18\sqrt{3}-6$

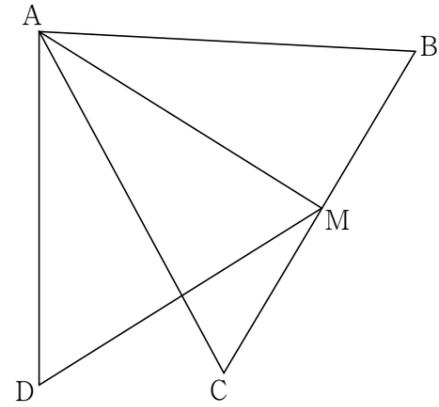
16. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y-4)^2+(z-8)^2=6$ 위를 움직이는 점P, 구 $(x-8)^2+(y-8)^2+(z-4)^2=6$ 위를 움직이는 점Q가 있다. 선분PQ의 평면 $3x+2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z=0$ 위로의 정사영의 길이가 최소일 때의 \overline{PQ}^2 의 값은? [4점]

- ① $\frac{12}{7}$
- ② $\frac{13}{3}$
- ③ $\frac{12}{5}$
- ④ $\frac{24}{5}$
- ⑤ $\frac{21}{4}$

17. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 이 평면 α 와 만나서 생기는 원을 C 라 하자. 원 C 의 중심의 x 좌표가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 원 C 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{8\sqrt{6}}{3}\pi$ ④ $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{6}}{4}\pi$

18. 그림과 같이 정삼각형 ABC, ADM 이 있다. 점 M 은 변 BC 의 중점이고, 선분 AB 의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이다. 점 C 와 평면 ADM 사이의 거리가 2일 때, 두 평면 ADM, BCD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\cos^2\theta$ 의 값은? [4점]



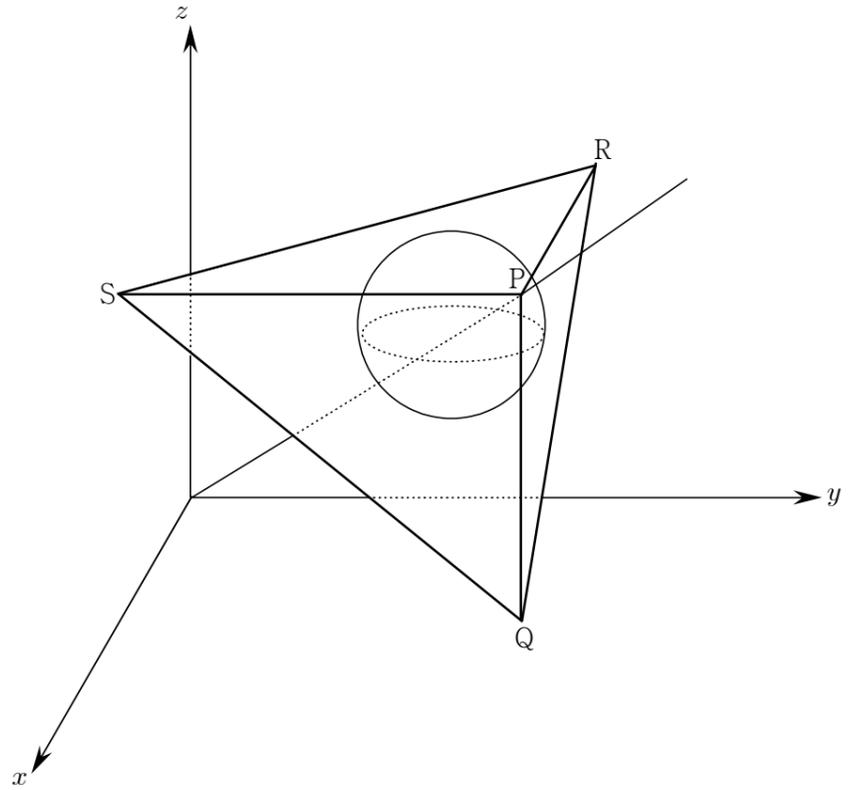
- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

19. 좌표공간에서 반지름의 길이가 6인 구 S 의 중심이

직선 $l: \frac{x-16}{5} = \frac{y-14}{4} = \frac{4-z}{3}$ 위에 있고, 구 S 가 평면 $x+2y+z=16$ 과 만나서 생기는 원 C 의 중심의 좌표가 $(4, 2, 8)$ 이다. 원 C 위의 한 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 길이의 최솟값은? [4점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

20. 좌표공간에서 직선 $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ 위의 한 점 P 에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 내린 수선의 발을 각각 Q, R, S 라 할 때, 반지름의 길이가 2인 구가 사면체 $PQRS$ 의 모든 면과 접하고, 구의 중심이 이 사면체 내부에 있다. 이 구의 중심의 좌표가 (a, b, c) 일 때, $2a+b+c$ 의 값은?
(단, 점 P 의 z 좌표는 양수이다.) [4점]



- ① 28 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

21. 좌표공간에서 중심이 O인 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 의 점P와 중심이 A인 구 $(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 5$ 의 점Q에 대하여 두 점P,Q가 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|^2$ 를 만족시키면서 점A가 선분PQ에 있도록 움직인다. 두 점P,Q의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 P',Q'라 할 때, $|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{P'Q'}|^2$ 의 최솟값은? [4점]

- ① $\frac{6\sqrt{2}-10}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{2}+5}{3}$ ③ 10
- ④ 9 ⑤ $\frac{23}{2}$

단답형

22. 좌표공간에서 원점과 평면 $4x + 3y + 5z = 15\sqrt{2}$ 사이의 거리를 구하시오. [3점]

23. 좌표공간에서 점A(5,2,4)와 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 위를 움직이는 점P가 있다. $|\overrightarrow{PA}|^2$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ 위의 점 P에서 직선

$$\frac{x-8}{2} = y-8 = \frac{z}{7}$$

에 내린 수선의 발을 H_1 이라고 하고, 점 H_1 에서

$$\text{직선 } x-14 = \frac{y-14}{3} = -z$$

에 내린 수선의 발을 H_2 라 할 때, 점 H_2 의

x 좌표가 12가 되도록 점 P가 움직인다. 점 P가 나타내는 도형의 넓이가 a 일 때, $\frac{12a}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표공간에서 두 점 $A(-2, 3, 4), B(-1, 2, 1)$ 가 있다. 점 A의 xy 평면 위로의 정사영을 A' 라 할 때, 삼각형 $AA'B$ 의 넓이를 a 라 하자. a^2 의 값을 구하시오. [3점]

26. 좌표공간에서 다섯 점 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 가 다음조건을 만족시킨다.

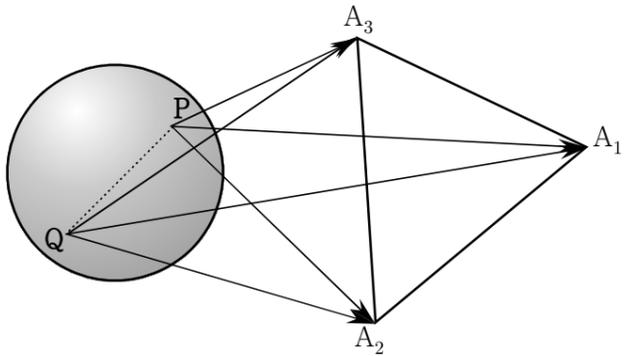
$$(가) \quad |\overrightarrow{A_1A_4}| = 1, \quad |\overrightarrow{A_0A_2}|^2 = 2\overrightarrow{A_0A_2} \cdot \overrightarrow{A_0A_3} = 20$$

$$(나) \quad \overrightarrow{A_0A_1} \cdot \left(\left(\frac{22}{3} - k \right) \overrightarrow{A_0A_1} - \frac{16}{3} \overrightarrow{A_0A_k} \right) = |16k - 32| \quad (k = 1, 2, 3)$$

삼각형 $A_2A_3A_4$ 의 평면 $A_0A_1A_2$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값이 $\frac{p}{q}$

일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

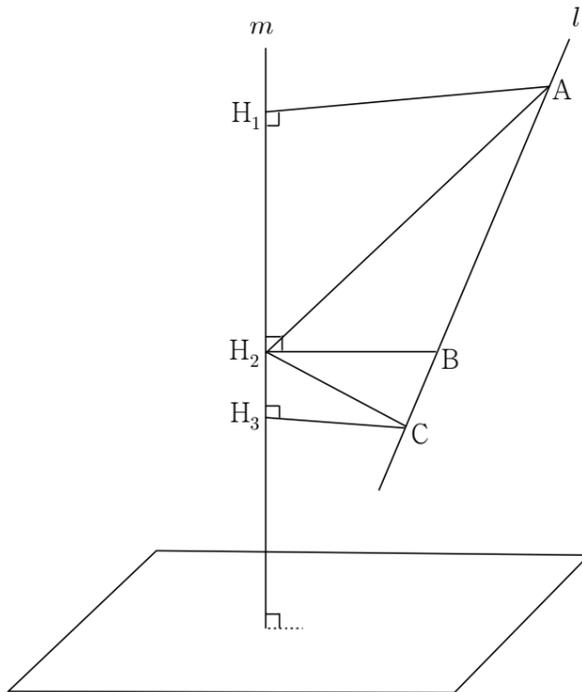
27. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 두 점 P, Q가 $|\overline{PQ}| = 4$ 를 만족시키도록 움직이고 있다. 넓이가 $6\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $A_1A_2A_3$ 의 한 변 A_1A_2 가 직선 $\frac{-x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ 와 평행하고, 변 A_1A_2 의 중점의 좌표가 $(3, 3, 3)$ 이다. $\sum_{k=1}^3 \overline{PA_k} \cdot \overline{QA_k}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



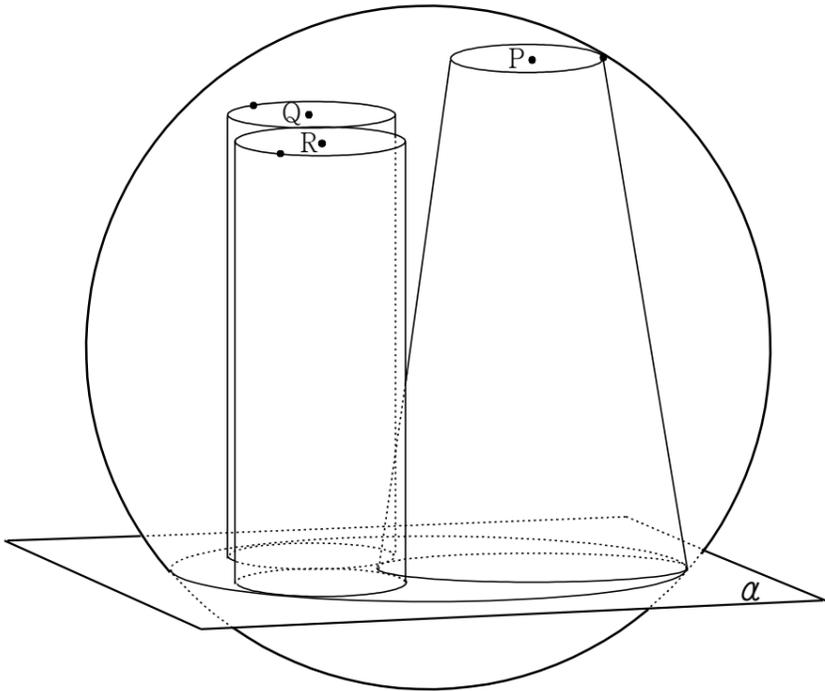
28. 서로 다른 세 점 A, B, C가 직선 l 위에 있고, 직선 l 과 꼬인 위치인 직선 m 이 있다. 세 점 A, B, C에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3 라 할 때, 세 점 A, B, C가 다음조건을 만족시킨다.

- (가) $l \perp \overline{CH_3}$, $\overline{CH_3} = \frac{\sqrt{14}}{2}$
- (나) $\overline{AH_1} = 4$, $\overline{BH_2} = 2$
- (다) 삼각형 CAH_2 의 넓이는 5이다.

직선 m 과 수직인 평면이 평면 CAH_2 과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $64\cos^2\theta$ 의 값을 구하시오. (단, 점 B는 선분 CA 위에 있다.) [4점]



29. 반지름의 길이가 10인 구가 구의 중심으로부터 거리가 6인 평면 α 와 만나서 생기는 원을 C 라 하고, 구 내부에 밑면의 반지름의 길이가 각각 3, 3, r ($r > 3$)인 두 직원기둥과 직원뿔대의 밑면의 둘레가 서로 외접하면서 원 C 에 내접하고 있다. 원뿔대와 원기둥의 평면 α 와 평행한 밑면이 각각 구와 한 점에서만 만나고, 이 밑면의 중심을 각각 P, Q, R 이라 하자. 원뿔대의 α 와 평행한 밑면의 반지름의 길이가 $\frac{14}{5}$ 일 때, 평면 PQR 이 평면 α 와 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $36\tan\theta$ 의 값을 구하시오. (단, 삼각형 PQR 은 평면 α 와 만나지 않는다.) [4점]



30. 좌표공간에서 두 평면 $\alpha: z = -10, \beta: \sqrt{3}y - z + 20 = 0$ 와 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 가 있다. 구 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R 이 다음조건을 만족시키면서 움직인다.

- (가) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = 0, 4|\overrightarrow{PQ}| = 3|\overrightarrow{QR}|$
- (나) 평면 PQR 은 yz 평면과 수직이다.

세 점 P, Q, R 의 평면 α 위로의 정사영을 각각 P_1, Q_1, R_1 라 하고, 평면 β 위로의 정사영을 각각 P_2, Q_2, R_2 라 하자.

$\sum_{k=1}^2 (|\overrightarrow{P_k Q_k}|^2 + |\overrightarrow{Q_k R_k}|^2 - |\overrightarrow{R_k P_k}|^2)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

