제 2 교시

수학 영역

KSM

5 지 선 다 형

1. $\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)=x^3-2x^2-4x$ 에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+5}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f'(x) = 3x^2-4x-4$

$f'(1) = -5$

3. $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin^2\theta=\dfrac{4}{5}$ 일 때, $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$ 의 값은? [3점]

① $-3\sqrt{5}$ ② $-2\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

$\sin\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = -2$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$-2\sqrt{5}$

4. $\displaystyle\int_1^2(3x+4)\,dx+\int_1^2(3x^2-3x)\,dx$ 의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$\displaystyle\int_1^2 (3x^2+4)\,dx$

$= x^3+4x\Big|_1^2 = 16-5 = 11$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2-3 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

$(1-a)^2-3=1$

$1-a=2, -2$

$a=-1, 3$

6. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$4(S_4-S_2)=S_6-S_4,\ a_3=12$$

일 때, S_3의 값은? [3점]

① 18　② 21　③ 24　④ 27　⑤ 30

$4(a_3+a_4)=a_5+a_6$

$4=r^2$

$r=2$　　$S_3=3+6+12=21$

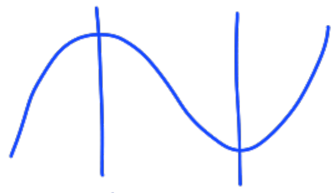
$ar^2=12,\ a=3$

7. 상수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$의 극솟값이 -17일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f'=3x^2-6x-9$

$=3(x-3)(x+1)$



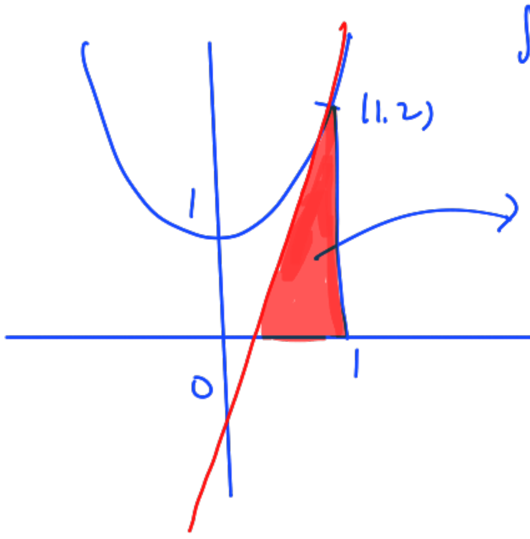
-1　3

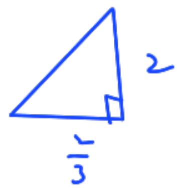
$\frac{3}{6}(4)^3=32$　　$-17+32=15$

8. 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 점 $(1, f(1))$을 지나고 기울기가 $m\,(m \geq 2)$인 직선이 이등분할 때, 상수 m의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

$\int_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$





$m = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$

9. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(4, \log_3 a)$, $\mathrm{B}\left(\log_2 2\sqrt{2}, \log_3 \frac{3}{2}\right)$이 있다. 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점이 직선 $y=4x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은? [4점]

$\frac{3}{2}$

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{7}{16}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $\frac{5}{8}$

$\left(\frac{\frac{9}{2}-4}{2}, \frac{3\log_3\frac{3}{2}-\log_3 a}{2}\right)$

$= \left(\frac{1}{4}, 1\right)$

$\therefore \log_3 \frac{27}{8a} = 2, \quad \frac{27}{8a} = 9$

$a = \frac{3}{8}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)g(x)=|f(x)|$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 $g(3)=0$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 9　② 12　③ 15　④ 18　⑤ 21

$x=1 \to f(1)=0$

$x=3 \to 2\underset{0}{g(3)} = |f(3)| \quad \therefore f(3)=0$

$f(x) = (x-1)(x-3)(x-a)$

$x \neq 1 \quad g(x) = \frac{|f(x)|}{(x-1)}$

$g(1) = \lim_{x \to 1} \frac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1} \quad \therefore a=1$

$f(x) = (x-1)^2(x-3)$

$f(4) = 9$

11. 모든 항이 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_5 - b_5 = a_6 - b_7 = 0$$

이다. $a_7 = 27$ 이고 $b_7 \le 24$ 일 때, $b_1 - a_1$ 의 값은? [4점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

$a_5 = b_5$
2d ↓ $a_6 = b_7$) 2d

a_n 공차: 2d, b_n 공차: d

$a_7 = 27$

$a_6 = 27 - 2d = b_7 \le 24$

$d \ge \frac{3}{2}$

$a_1 = 27 - 12d > 0$, $d < \frac{27}{12}$] $d = 2$

$b_1 = b_5 - 4d$
$= a_5 - 4d$
$= a_3$

$a_1 = 27 - 24 = 3$

$b_1 = a_3 = 3 + 8 = 11$

$\therefore b_1 - a_1 = 8$

12. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = -3t^2 + at,\ v_2(t) = -t+1$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 양수 a에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는? [4점]

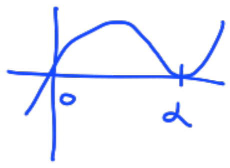
① $\frac{29}{2}$　② 15　③ $\frac{31}{2}$　④ 16　⑤ $\frac{33}{2}$

$x_1(t) = -t^3 + \frac{a}{2}t^2$
$x_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$) =

$t^3 - \frac{1}{2}(a+1)t^2 + t = 0$

$t(t^2 - \frac{1}{2}(a+1)t + 1) = 0$

(0, 1)



⇓ $D = 0$, $a+1 > 0$

$a+1 = 4, -4$

$a = 3, -5$ $\therefore a = 3$

$v_1(t) = -3t^2 + 3t = -3t(t-1)$

$\int_0^1 v_1(t) - \int_1^3 v_1(t)$

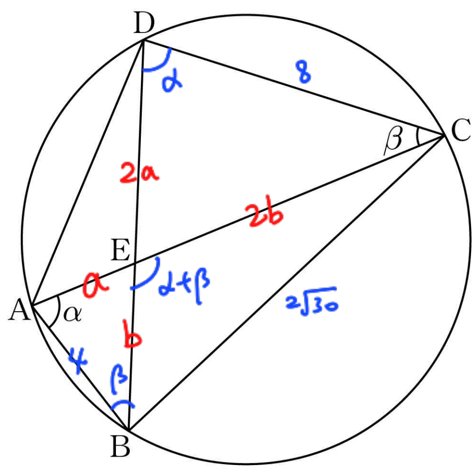
$= \frac{3}{6}(1)^3 + \left[t^3 - \frac{3}{2}t^2\right]_1^3$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{27}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{2}$

13. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2\sqrt{30}$, $\overline{CD}=8$

이다. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ACD=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{12}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는? $\left(단, 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$\triangle EAB \sim \triangle EDC$ 1:2

$\triangle EBC$ $120 = 5b^2 - 4b^2\left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{20}{3}b^2$, $b^2=18$, $b=3\sqrt{2}$

$\triangle EAB$ $16 = a^2+18-2a\cdot 3\sqrt{2}\left(\frac{5}{12}\right)$

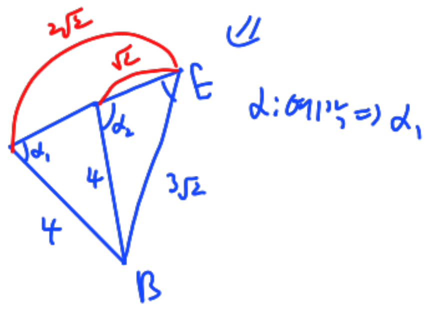
$a^2-\frac{5}{2}\sqrt{2}a+2=0$

$2a^2-5\sqrt{2}a+4=0$

$2a \quad -\sqrt{2}$

$a \quad -2\sqrt{2}$ $a=2\sqrt{2}=\overline{AE}$

$\Downarrow$



α: 예각 ⇒ α₁

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ f(x-1)+2 & (x>1) \end{cases}$$ $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<1) \\ f'(x-1) & (x>1) \end{cases}$

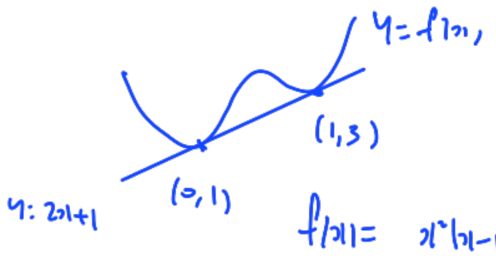
은 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이다. $g'(t)=2$인 서로 다른 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

$g(0)=f(0)=1$
$g'(0)=f'(0)=2$

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$x=1$ 연속 → $f(1)=f(0)+2=3$, $f(1)=3$, $f(0)=1$

$x=1$ 미분가능 → $f'(1)=f'(0)=2$



$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1$
$=x^4-2x^3+x^2+2x+1$

$f'(x)=4x^3-6x^2+2x+2=2$, $2x(2x^2-3x+1)=0$
$2x(2x-1)(x-1)=0$
$x=0, \frac{1}{2}, 1$

$g'(t)=2 \rightarrow \begin{cases} f'(t)=2 & (t\le 1) \\ f'(t-1)=2 & (t\ge 1) \end{cases}$

$t=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ 합: 5

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 } a_n\text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n+1 & (n\text{이 } a_n\text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 254 ② 264 ③ 274 ④ 284 ⑤ 294

$$a_n=\begin{cases} n a_{n+1} \\ \dfrac{a_{n+1}-1}{3} \end{cases}$$ 모든항이 자연수

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
		40	120	240	240
2	10				
			13	26	26
				~~4~~	
		3	9	18	18

$240+26+18=284$

단답형

16. 방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27^{x-8}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$3^{-x}=3^{3x-24}$ $\boxed{6}$

$-x=3x-24$

$x=6$

17. 함수 $f(x)=(x^2+3x)(x^2-x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{58}$

$f'=(2x+3)(x^2-x+2)+(x^2+3x)(2x-1)$

$f'(2)=7\times4+10\times3=58$

18. 수열 $\{a_n\}$과 상수 c에 대하여

$$\sum_{n=1}^{9} ca_n = 16,\quad \sum_{n=1}^{9}(a_n + c) = 24$$

일 때, $\sum_{n=1}^{9} a_n$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{12}$

$c\sum_{n=1}^{9} a_n = 16$, $\sum_{n=1}^{9} a_n + 9c = 24$

$\frac{16}{c} + 9c = 24$

$9c^2 - 24c + 16 = 0$

$(3c-4)^2 = 0$, $c = \frac{4}{3}$

$\therefore \sum_{1}^{9} a_n + 12 = 24$

$\sum_{1}^{9} a_n = 12$

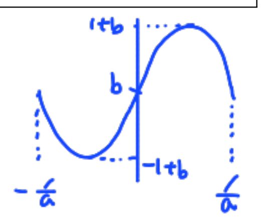
19. 두 상수 a, b $(a>0)$에 대하여 함수 $f(x) = |\sin a\pi x + b|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{84}$

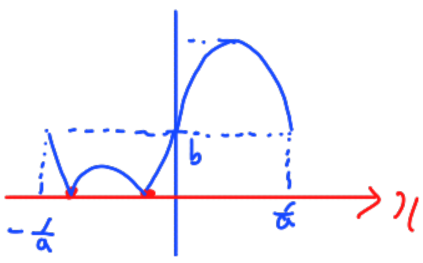
(가) $f(x) = 0$이고 $|x| \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

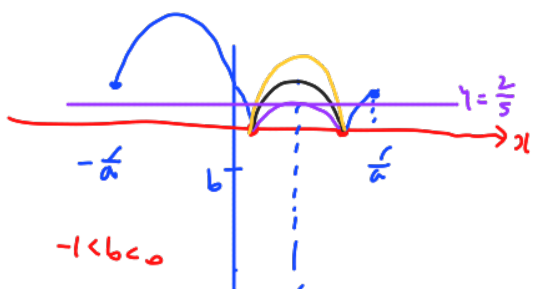
(나) $f(x) = \frac{2}{5}$이고 $|x| \le \frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

$|b| \ge 1 \rightarrow$ (가) X　$\therefore |b| < 1$

$\sin a\pi x + b$







$0 \le b < 1$

(가) X

$-1 < b < 0$

$\frac{1}{2a} = \frac{1}{4}$, $a = 2$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{1}{2} \times 2$ 이므로

교점 3개 $\Rightarrow f(\frac{1}{4}) = \frac{2}{5}$

$|\sin \frac{\pi}{2} + b| = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$

$\therefore 60(a+b) = 84$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 2\int_3^x (t^2 + 2t)f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M - m$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{54}$

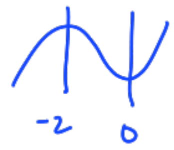
$x = 3 \rightarrow (f(3))^2 = 0$, $f(3) = 0$

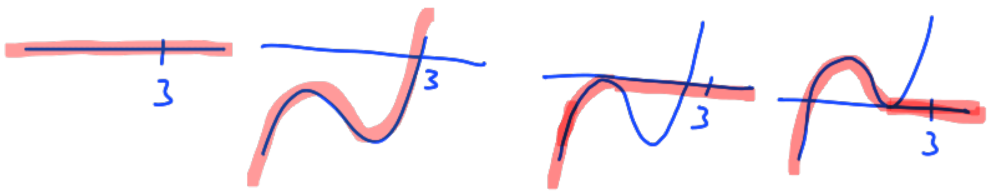
양변미분 $2f(x)f'(x) = 2(x^2+2x)f(x)$

$2f(x)\left(f'(x) - (x^2+2x)\right) = 0$

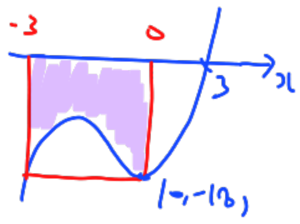
$\therefore f(x) = 0$ or $f'(x) = x^2 + 2x$

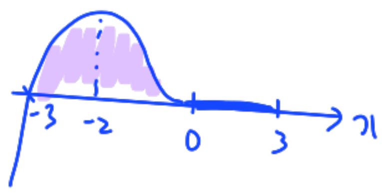
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$





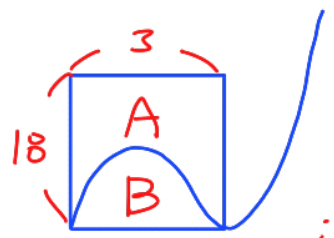
$\int_{-3}^{0} f(x)dx$ 최소　　$\int_{-3}^{0} f(x)dx$ 최대





$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 18$

$f(0) = -18$



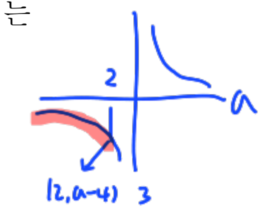
$M = B$

$m = -A$

$\therefore M - m = B + A = 54$

21. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

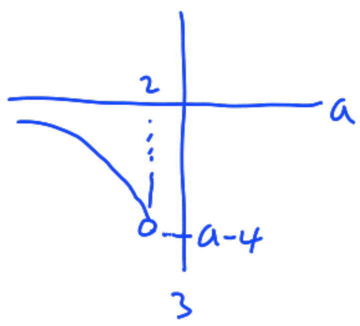
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-3}+a & (x<2)\\ |5\log_2 x-b| & (x\geq 2)\end{cases}$$

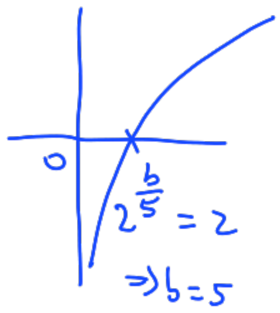


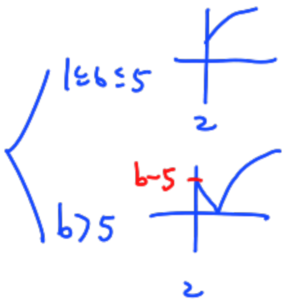
이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오. [4점]

$\boxed{15}$

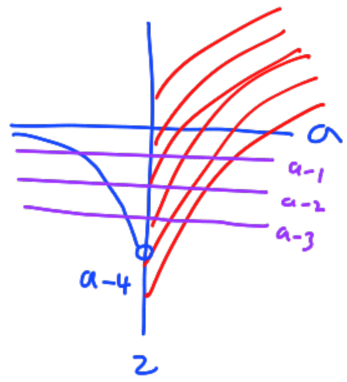
(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다. (나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.





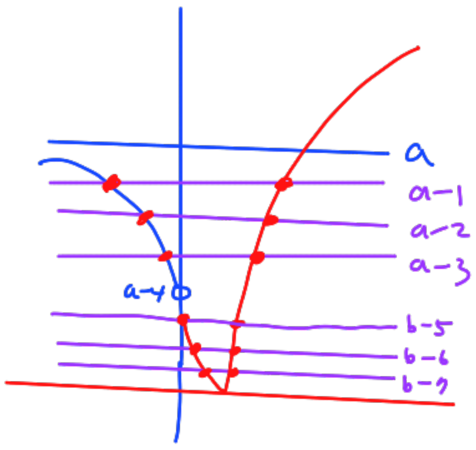


i) 1≤b≤5



g(t)=2
최대 3개
(a-1, a-2, a-3)
(나) X

ii) b>5



b-7=1, b=8

b-5≤a-4

a≥7 ∴ a+b 최소:15

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x)+x & (f(x)\geq 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

f'(x)+1

2f'(x)

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 불연속인 실수 t의 개수는 1이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수는 2이다.

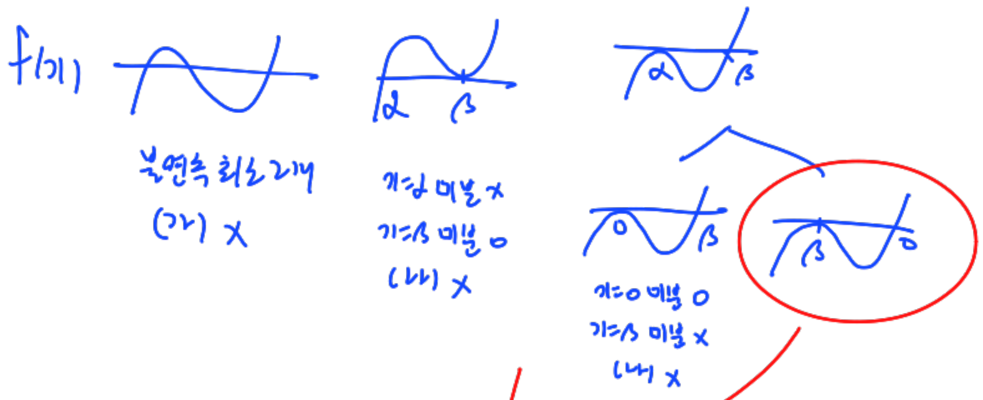
f(x)=0 실근 2개이상

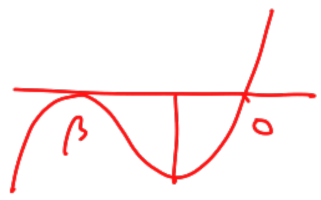
$f(-2)=-2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{486}$

f(α)=0 [α=0 → g(x)는 x=α 연속
α≠0 → g(x)는 x=α 불연속

불연속 1개인데 미분불가능 2개 ⇒ 불연속 α, 미분불가능 α, 0 f(0)=0
x=0 미분가능





f(x)=x(x-β)², β<0

f(-2)=-2(-2-β)²=-2, β=-3

f(x)=x(x+3)²

f(6)=6×81=486

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 4개의 문자 a, a, b, b를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{15}, \quad \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{1}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

$P(B) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{15}$

$P(A) = \frac{2}{5}$

25. 다항식 $(2x+5)(x-1)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [3점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

$2x \times {}_5C_2\, x^2(-1)^3$ $-20x^3$

$5 \times {}_5C_3\, x^3(-1)^2$ $50x^3$

26. 어느 회사에서 생산하는 다회용 컵 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 0.5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 다회용 컵 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 67.27일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le 67.41$이다. $n+a$의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 92.13 ② 97.63 ③ 103.13 ④ 109.63 ⑤ 116.13

$67.27 - 1.96 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}} \le m \le 67.27 + 1.96 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}}$

$\frac{0.98}{\sqrt{n}} = 0.14$

$\sqrt{n} = 7, \quad n = 49$

$a = 67.27 - 0.14 = 67.13$

116.13

27. 7개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 각각의 공에는 1 또는 2 또는 3 중 하나의 숫자가 적혀 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 확인한 두 개의 수의 곱을 확률변수 X라 하자. 확률변수 X가

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{21},\quad 2\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=6)$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(X\le 3)$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

1 → x개
2 → y개
3 → z개

$x+y+z=7$

$P(X=4)=\frac{{}_yC_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{21}$, $\frac{y(y-1)}{2}=1$

$y=2$

$P(X=2)=\frac{{}_xC_1\times{}_yC_1}{{}_7C_2}=\frac{2x}{21}$

$P(X=6)=\frac{{}_2C_1\times{}_zC_1}{{}_7C_2}=\frac{2z}{21}$

$2\cdot\frac{2x}{21}=3\cdot\frac{2z}{21}$, $z=\frac{2}{3}x$, $x+y+z=7$

$x+2+\frac{2}{3}x=7$

$x=3$, $z=2$

$P(X\le3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{{}_3C_2+3\cdot2+3\cdot2}{{}_7C_2}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$

28. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y와 X의 확률밀도함수 $f(x)$, Y의 확률밀도함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(X\ge 2.5)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

(가) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=1$

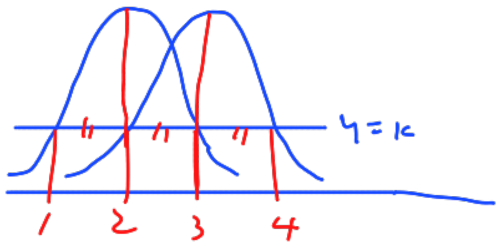
(나) 어떤 양수 k에 대하여 직선 $y=k$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 모든 점의 x좌표의 집합은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.

(다) $\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(Y\le 2)>0.5$

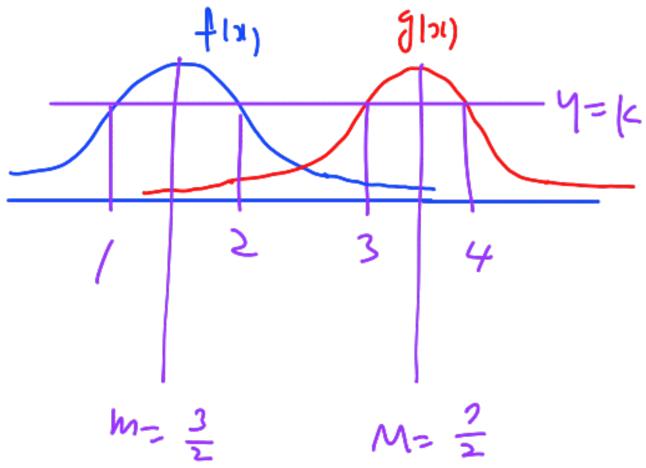
① 0.3085 ② 0.1587 ③ 0.0668 ④ 0.0228 ⑤ 0.0062

$X\sim N(m, 1^2)$

$Y\sim N(M, 1^2)$



(다) 만족 X



$X\sim N(\frac{3}{2}, 1^2)$

$P(X\ge2.5)=P(Z\ge1)=0.1587$

단답형

29. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $x=1,\ 2,\ 3$일 때, $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $f(a)=a$인 X의 원소 a의 개수는 1이다.

$\boxed{48}$

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$

$X \xrightarrow{f} Y$
X: 1, 2, 3, 4
Y: 0, 1, 2, 3, 4, 5

f(1) f(2) f(3) f(4)

i) $f(1)=1$: 1, [1: ${}_5H_2-(3+4-1)=9$ / 3: ${}_3H_2-(3+2-1)=2$ / 4: 2 / 5: 1] 14개

ii) $f(2)=2$: 0, 2] 2, ${}_4H_2-(3+3-1)=5$, $2\times5=10$

iii) $f(3)=3$: 3, ii)와 대칭구조 개수동일 10

iv) $f(4)=4$: 4, i)과 대칭구조 개수동일 14

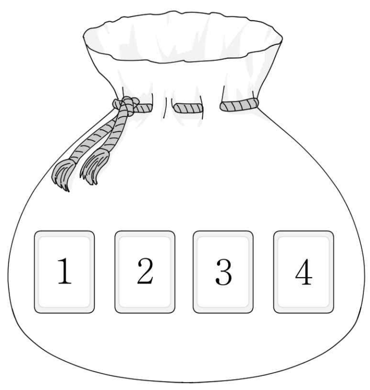
$\therefore 14+10+10+14=48$

30. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수 k가
> 홀수이면 점 P를 양의 방향으로 k만큼 이동시키고,
> 짝수이면 점 P를 음의 방향으로 k만큼 이동시킨다.

이 시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상일 때, 확인한 네 개의 수의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{61}$



$1 \to +1$, $2 \to -2$, $3 \to +3$, $4 \to -4$

1	2	3	4
+1	−2	+3	−4
a번	b번	c번	d번

i) $d=0 \Rightarrow$ $b=0$ ---- 16; $b=1$ -2--- $4\times2^3=32$; $b=2$ $-2-2$-- $6\times3=18$ (1 1 / 1 3 / 3 1)) 66

ii) $d=1 \Rightarrow$ $b=0$ -4--- $4\times(2^3-1)=28$ (−4 1 1 1 제외); $b=1$ $-4-2$-- (3 3) $12\times1=12$) 40

네 수의 곱 홀수
1,3만 선택 → $2^4=16$

$\frac{16}{66+40}=\frac{8}{53}=\frac{q}{p}$

$\therefore p+q=61$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

24. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. 수열 $a_n = \left(\frac{k}{2}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 모든 자연수 k에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a \times a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{a_n + b \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{k}{2}$$

일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

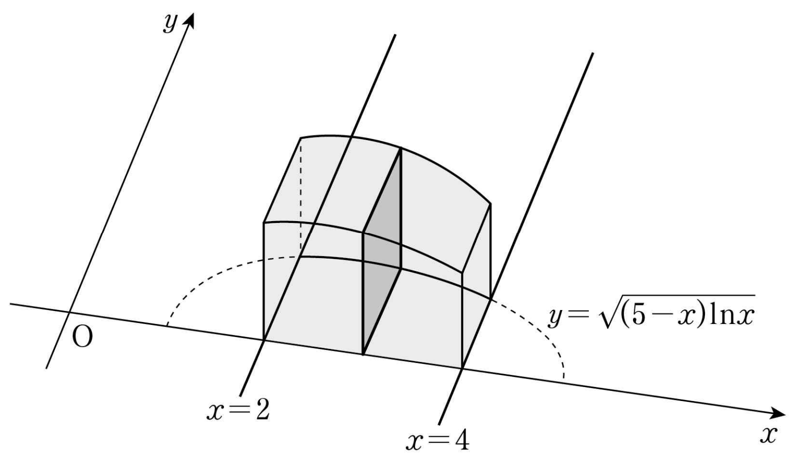
$-1 < \frac{k}{2} \le 1$

$-2 < k \le 2, \quad k = 1, 2$

$k=1 \to \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{a+1}{1+b} = \frac{1}{2}$

$k=2 \to \lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot 1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n} = a = 1$ $\quad b=3$

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{(5-x)\ln x}$ $(2 \le x \le 4)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $14\ln 2 - 7$ ② $14\ln 2 - 6$ ③ $16\ln 2 - 7$
④ $16\ln 2 - 6$ ⑤ $16\ln 2 - 5$

$\int_2^4 (5-x)\ln x \, dx$

$= \left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)\ln x \Big|_2^4 - \int_2^4 \left(5 - \frac{1}{2}x\right) dx$

$= (12\ln 4 - 8\ln 2) - \left[-\frac{1}{4}x^2 + 5x\right]_2^4$

$= 16\ln 2 - (16-9) = 16\ln 2 - 7$

27. 함수 $f(x)=e^{3x}-ax$ (a는 상수)와 상수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge k) \\ -f(x) & (x<k) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가질 때, $a\times k$의 값은? [3점]

① e ② $e^{\frac{3}{2}}$ ③ e^2 ④ $e^{\frac{5}{2}}$ ⑤ e^3

연속 ⇒ $f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$ $e^{3k}-ak=0$

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>k) \\ -f'(x) & (x<k) \end{cases}$

역함수조건 → $g'(x)$ 부호변화 X

$f'(x)=3e^{3x}-a=0$ $a>0$

$x=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$

$\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}=k$

$e^{3k}-ak=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\ln\frac{a}{3}=0$

$\frac{a}{3}\left(1-\ln\frac{a}{3}\right)=0$ $\therefore a=3e$

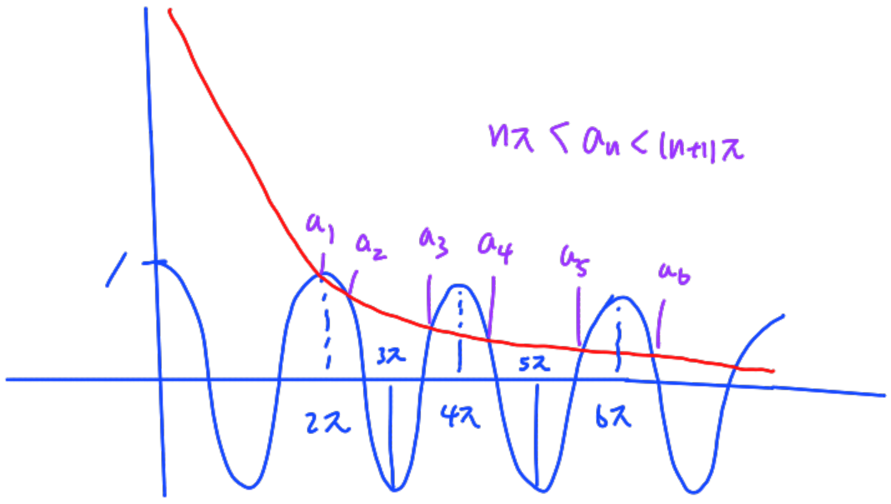
$k=\frac{1}{3}$

$ak=e$

28. 함수 $y=\frac{2\pi}{x}$의 그래프와 함수 $y=\cos x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, m번째 수를 a_m이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{n\times\cos^2(a_{n+k})\}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$



$\frac{2\pi}{a_m}=\cos a_m$, $\cos^2 a_{n+k}=\left(\frac{2\pi}{a_{n+k}}\right)^2$

$n\times\cos^2(a_{n+k})=\frac{4n\pi^2}{(a_{n+k})^2}$

$n\pi<a_n<(n+1)\pi$

$(n+k)\pi<a_{n+k}<(n+k+1)\pi$

$\frac{1}{(n+k+1)}<\frac{\pi}{a_{n+k}}<\frac{1}{(n+k)}$

$\frac{4n}{(n+k+1)^2}<\frac{4n\pi^2}{(a_{n+k})^2}<\frac{4n}{(n+k)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k+1)^2}<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n\pi^2}{(a_{n+k})^2}<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k)^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(1+\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$ $\int_1^2\frac{4}{x^2}dx$ $1+\frac{k}{n}\to x$, $\frac{1}{n}\to dx$

$=\frac{-4}{x}\Big|_1^2=2$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4n}{(n+k)^2}-\frac{4n}{(n+k+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}4n\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=0$

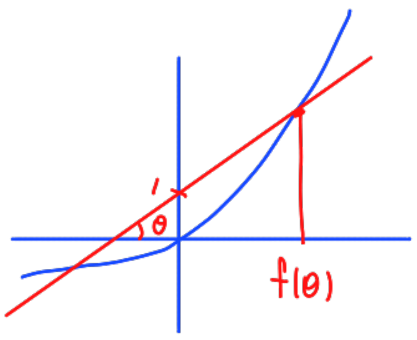
$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k+1)^2}=2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n\pi^2}{(a_{n+k})^2}=2$

단답형

29. 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$이 있다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 직선 l이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1\,(a>0)$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $f(\theta)$라 하자. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a$일 때, $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고 p, q는 정수이다.) [4점]

$\boxed{5}$



$f(\theta)>0$

$f'(\theta)>0$

$l: y=(\tan\theta)x+1$

$(\tan\theta)f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$

$\theta=\frac{\pi}{4}$, $f(\frac{\pi}{4})=a$ $\Rightarrow$ $a+1=e-1$, $a=e-2$

→ 양변미분 $\sec^2\theta f(\theta)+\tan\theta f'(\theta)=e^{\frac{f(\theta)}{a}}\cdot\frac{1}{a}f'(\theta)$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ → $2a+f'(\frac{\pi}{4})=\frac{e}{a}f'(\frac{\pi}{4})$

$f'(\frac{\pi}{4})=\frac{2a^2}{e-a}=a^2=(e-2)^2$

$\sqrt{f'(\frac{\pi}{4})}=|e-2|=e-2$

$\therefore p=1, q=-2$ $p^2+q^2=5$

30. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{40}$

(가) $\{x \mid f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이다.
(나) $f(2)=2e^{-2}$

(가) $f(x)=f'(t)x$ 근: $x=0$ 유일인 t의 개수 1

원점 지나고 기울기: $f'(t)$

(나) $(4a+2b)e^{-2}=2e^{-2}$, $2a+b=1$

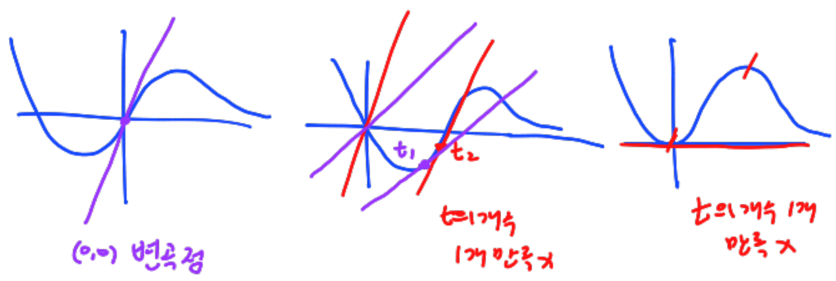
$f'(x)=(-ax^2+(2a-b)x+b)e^{-x}$

$D=4a^2-4ab+b^2+4ab$
$=4a^2+b^2>0$

f' ⊖ α ⊕ β ⊖

f

$\lim_{x\to\infty}f=0^+$



$f''(x)=\begin{pmatrix}ax^2+(b-2a)x-b\\-2ax+2a-b\end{pmatrix}e^{-x}=(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b)e^{-x}$

$f''(0)=0$, $2a-2b=0$

$\begin{cases}a-b=0\\2a+b=1\end{cases}$

$a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$ $\therefore 60\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})=40$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

$(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$

24. 좌표공간의 점 A$(3,\ -1,\ a)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(-3,\ b,\ 4)$에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$B(3,-1,-a)$

$\left(\quad , \frac{b-2}{3}, \frac{4-2a}{3}\right)$

$\frac{b-2}{3}=0$, $\frac{4-2a}{3}=0$

$b=2$

$a=2$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13},\ |\vec{a}-\vec{b}|=1,\ |\vec{a}|=\sqrt{2}$$

일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

$4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=13$

$-\ |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$3|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

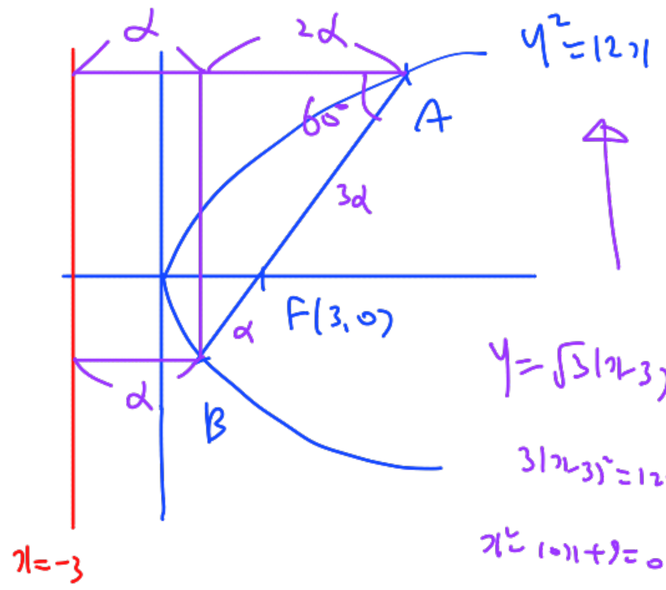
$6+6\vec{a}\cdot\vec{b}=12,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ |\vec{b}|=1$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=2+1+2\cdot1=5$

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$

26. 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$일 때, 이 포물선 위의 점 A에서의 접선의 y절편은? [3점]

① $\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{3}$



$y=\sqrt{3}(x-3)$

$3(x-3)^2=12x$

$x^2-10x+9=0$

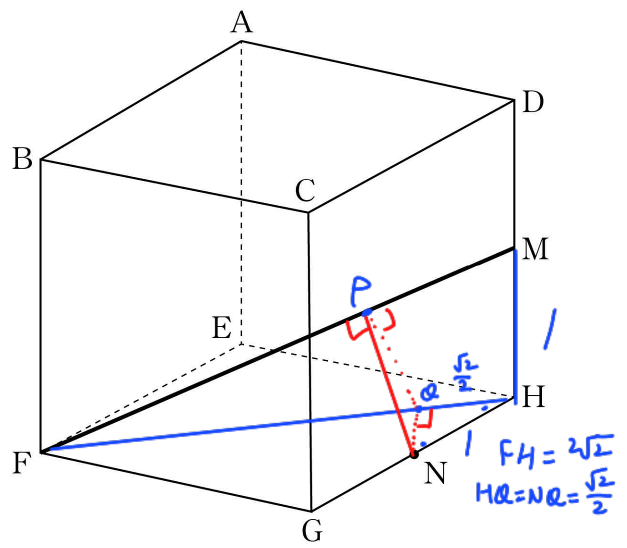
$x=1, 9$

$A(9, 6\sqrt{3})$

$6\sqrt{3}y=6(x+9)$

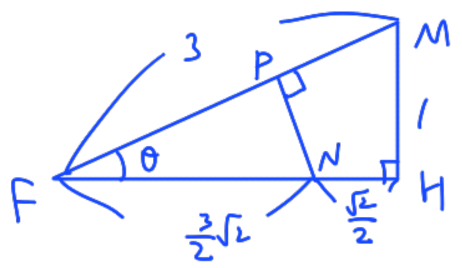
$\sqrt{3}y=x+9$ $(0, 3\sqrt{3})$

27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 모서리 DH의 중점을 M, 모서리 GH의 중점을 N이라 하자. 선분 FM 위의 점 P에 대하여 선분 NP의 길이가 최소일 때, 선분 NP의 평면 FHM 위로의 정사영의 길이는? [3점]



① $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\overline{NQ} \perp \triangle MFH$
$\overline{NP} \perp \overline{MF}$
$\overline{MF} \perp \triangle PNQ$
$\Rightarrow \overline{MF} \perp \overline{PQ}$



$\sin\theta = \frac{1}{3}$, $\overline{PN} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

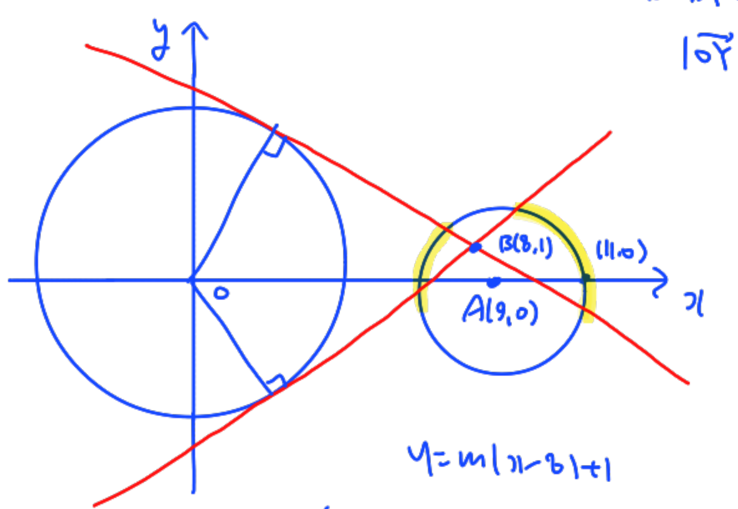
28. 좌표평면의 두 점 A(9, 0), B(8, 1)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

(가) $\lvert\overrightarrow{AX}\rvert = 2$
(나) $\lvert\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{BX}\rvert = 4$를 만족시키는 실수 k가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 x좌표가 최대인 점을 P라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BP}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

$k\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BY}$
$\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{BX}$
$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{OY}$
$\lvert\overrightarrow{OY}\rvert = 4$



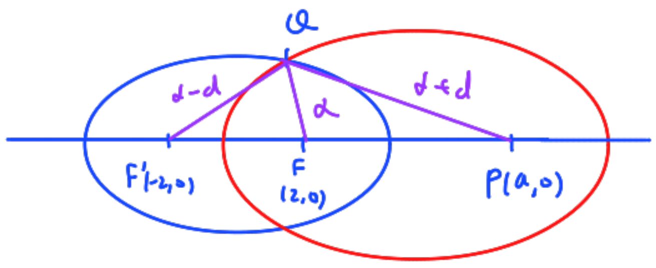
$y = m(x-8)+1$
$(0,0) \sim mx - y - 8m + 1 = 0$
$\frac{|1-8m|}{\sqrt{m^2+1}} = 4$, $16m^2+16 = 64m^2-16m+1$
$48m^2-16m-15=0$
$12m \quad +5$
$4m \quad -3$
$m = -\frac{5}{12}, \frac{3}{4}$
$y = -\frac{5}{12}(x-8)+1$ $(11, \frac{3}{4})$ $\therefore P(11,0)$
$\overrightarrow{OP} = (11,0)$, $\overrightarrow{BP} = (3,-1)$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{BP}|} = \frac{33}{11\cdot\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$$

단답형

29. 장축의 길이가 8이고 두 초점이 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$인 타원을 C_1이라 하자. 장축의 길이가 12이고 두 초점이 F, $\mathrm{P}(a, 0)\ (a>2)$인 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a=p+q\sqrt{10}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

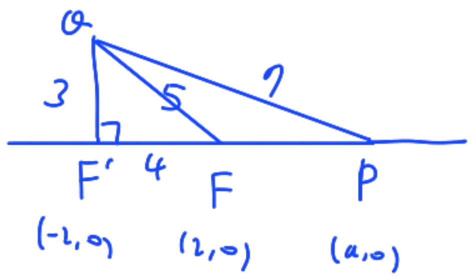
$\boxed{8}$



$\alpha+(\alpha-d)=8$

$+\ \alpha+(\alpha+d)=12$

$4\alpha=20,\ \alpha=5,\ d=2$



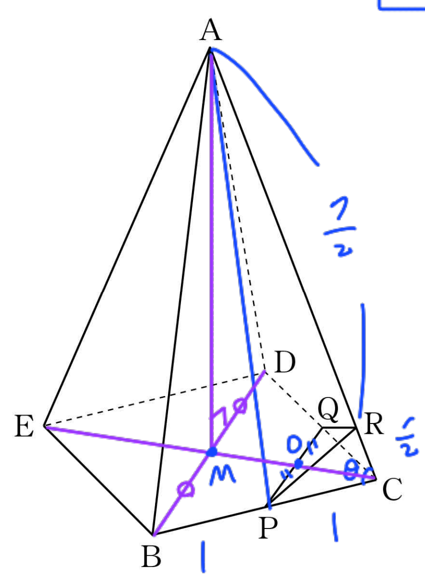
$\overline{F'P}=\sqrt{49-9}=2\sqrt{10}=a+2$

$\therefore a=2\sqrt{10}-2,\ p=-2$

$p^2+q^2=8 \quad q=2$

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 밑면으로 하고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=4$인 정사각뿔 A−BCDE가 있다. 두 선분 BC, CD의 중점을 각각 P, Q라 하고, 선분 CA를 1 : 7로 내분하는 점을 R이라 하자. 네 점 C, P, Q, R을 모두 지나는 구 위의 점 중에서 직선 AB와의 거리가 최소인 점을 S라 하자. 삼각형 ABS의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이가 $p+q\sqrt{2}$일 때, $60\times(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{20}$



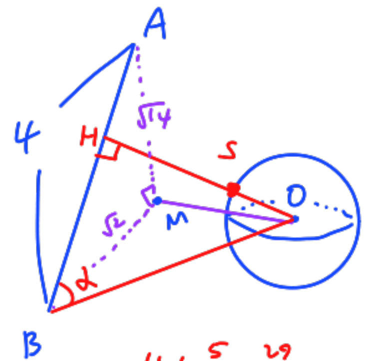
$\angle PCR=\theta,\ \cos\theta=\frac{1}{4}$

$\overline{PR}^2=1+\frac{1}{4}-2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=1$

$\therefore \overline{PR}=\overline{QR}=1,\ \overline{PQ}=\sqrt{2}$

$\angle QRP=90^\circ$

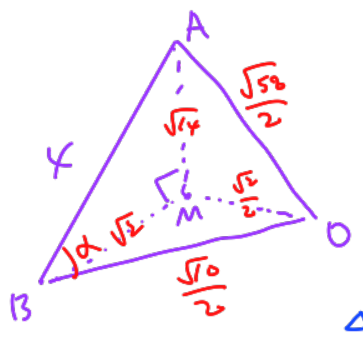
$\angle QCP=90^\circ$) PQ : 구의 지름, 구의 반지름 : $\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos\alpha=\dfrac{16+\frac{5}{2}-\frac{29}{2}}{2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\overline{OH}=\overline{BO}\sin\alpha=\frac{3}{2}$

$\overline{HS}=\overline{OH}-\overline{OS}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$



$\triangle ABS=\frac{1}{2}\cdot4\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}=3-\sqrt{2}$

$\triangle OAB\cos\beta=\triangle OMB$

$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}$

$\therefore \triangle ABS\cos\beta=\frac{3-\sqrt{2}}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}$

$60(p+q)=60\times\frac{2}{6}=20$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.