2021 김기대T 서울시립대 Final

시립대 오후 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 120분, 난이도 : normal ~ hard]

이름	김 기 대 T

지원학과	수 학 과 / 예상합격컷 : 230~300점/400점 (과별 상이)

【 수험생 유의사항 】

1. 본 파일은 시립대 시험장 현장에서 본 시험지를 그대로 복기하였습니다.
2. 오후는 직접 현장응시했기 때문에, 복기와 풀이가 정확합니다.
3. 오전은 카더라에 의한 문제복기와 조교 풀이로 작성됐으므로, 다소 부정확할 수 있습니다. 오전 복기/ 해설 중 수정이 필요한 사항은 kidae6150@naver.com 으로 제보 바랍니다.

[문제 1] (100점)

함수 $f(x)=x^4+2ax^3-3a^2x^2+4a^4-4a^3+1$ (단, $a>0$)이 점 $(1,1)$을 지나는 직선과 서로 다른 두 점에서 접한다고 할 때, 이 직선과 함수 $f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

[sol. 기대T 현장풀이]

점 $(1,1)$을 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하면 $g(x)=m(x-1)+1$로 나타낼 수 있다.
이 때, 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g(x)$가 두 점에서 접하므로, 접하는 두 점의 x좌표를 $x=\alpha$, $x=\beta$ (단, $\alpha<\beta$)에 대하여 다음이 성립한다.
$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=x^4+2ax^3-3a^2x^2-mx+4a^4-4a^3+m$

따라서 모든 계수들을 비교하면 다음과 같은 관계식을 이끌어낼 수 있다.

$$\begin{cases} 2\alpha+2\beta=-2a \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=-3a^2 \\ 2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2=m \\ \alpha^2\beta^2=4a^4-4a^3+m \end{cases}$$

정리하면 $\alpha+\beta=-a$이고 $\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=a^2+2\alpha\beta=-3a^2$에 의해 $\alpha\beta=-2a^2$이므로 이 둘을 연립하면 $\alpha=-2a, \beta=a$ ($\because$ $a>0$) 임을 알 수 있다.

(참고로 3번째 식을 정리하면 $m=4a^3$임을 알 수 있으나 4번째 식에 모든 결과를 대입하면 a에 대한 항등식이 나오게 되므로, a의 값은 특정되지 않는다.)

$$\begin{aligned}(\text{넓이}) &= \int_{-2a}^{a}(x+2a)^2(x-a)^2dx \\ &= \int_0^{3a}x^2(x-3a)^2dx \\ &= \int_0^{3a}(x^4-6ax^3+9a^2x^2)dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}ax^4+3a^2x^3\right]_0^{3a} \\ &= \frac{243}{5}a^5-\frac{243}{2}a^5+81a^5 \\ &= \frac{81}{10}a^5\end{aligned}$$

[문제 1 Comment]

항상 그랬듯 시립대의 1번은 자신감 고취용 문제이다. 적당히 쉬운 난이도.
다만 맘에 들지 않는 부분은, 왜 a의 값이 특정 되지 않도록 줬을까 하는 부분이다. 함수 $f(x)$의 상수항 부분을 조금만 다른 a값으로 줬으면 양수 a의 값을 특정지을 수 있는데, 이 부분에서 나를 비롯한 많은 학생들이 의아해했다.
(이게도까지 동원해서 a가 특정되는지 확인해본건 안비밀)

[문제 2] (100점)

자연수 n $(n \ge 9)$에 대하여 집합 A_n은 n 이하인 모든 자연수들을 원소로 갖는 집합이다.
다음을 만족하는 함수 $f : A_n \to \{0,1,2\}$의 개수를 구하시오.

(1) $\{k \mid f(k)=0, k \in a_n\}$의 원소의 개수는 3이다.
(2) $\{k \mid f(k)=1, k \in a_n\}$의 원소의 개수는 3이다.
(3) $\sum_{i=1}^{k} f(i) \ge k$

[sol]
조건(1), (2)를 통해, 함숫값이 2인 정의역의 원소의 개수는 $n-6$임을 알 수 있다.
조건 (3)을 해석해보면, n 이하의 모든 자연수 k에 대하여 함숫값의 평균이 항상 1 이상이 되도록 설정하라는 뜻이므로, 조건 (2)를 만족하는 k의 위치는 상관이 없음을 알 수 있다.

따라서, 1을 3개 미리 배치한 후 $({}_{n}\mathrm{C}_3)$
3개의 0과 $n-6$개의 2를 조건에 맞게 배치하는 경우의 수($=N$이라 하자.)를 구하는 것으로 문제의 조건을 만족시키는 함수의 개수를 ${}_{n}\mathrm{C}_3 \times N$으로 구할 수 있다.

① 적당한 case 분류를 통해 N 구하기 (기대T 현장 풀이)

1이 아닌 함숫값을 갖는 정의역의 원소를 작은 순서대로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$이라 하자.
이 값들을 0 또는 2에 대응시키는 총 경우의 수는 ${}_{n-3}\mathrm{C}_3$ 인데, 이 중 (3)의 조건을 만족시키지 않는 경우의 수를 빼는 방법으로 N을 구하도록 하자.

	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$f(a_4)$	$f(a_5)$	$f(a_6)$	$\cdots$
ⓐ	0	${}_{n-4}\mathrm{C}_2$ (남은 0 2개를 마음대로 고름)					
ⓑ	2	0	0	${}_{n-6}\mathrm{C}_1$ (남은 0 1개를 마음대로 고름)			
ⓒ	2	0	2	0	0	1 (이후 전부 함숫값 2)	
ⓓ	2	2	0	0	0	1 (이후 전부 함숫값 2)	

따라서 $N = {}_{n-3}\mathrm{C}_3 - ({}_{n-4}\mathrm{C}_2 + {}_{n-6}\mathrm{C}_1 + 1 + 1) = \dfrac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6}$ 이다.

② 0을 미리 분할하여 N 구하기 (조교 및 수강생 우수풀이)

2를 $n-6$개 배치한 후, 2의 양 끝과 사이사이에 조건에 맞게 0을 3개 집어넣는다. 0을 3개 집어넣는 개수를 분할하면 $\{1,1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{2,1\}$, $\{3\}$이다.

i) $\{1,1,1\}$일 때, 총 $n-5$개의 칸 중에서 왼쪽 끝을 제외한 $n-6$개의 칸에 3개를 집어넣는 경우이므로, ${}_{n-6}\mathrm{C}_3=\dfrac{(\mathrm{n}-6)(\mathrm{n}-7)(\mathrm{n}-8)}{6}$ 이다.

ii) $\{1,2\}$일 때, $n-6$개의 칸에 2개를 집어넣었을 때, 왼쪽에서부터 첫 번째, 두 번째에 0이 각각 1개, 2개가 들어가는 경우를 제외하고 모두 만족하므로,

${}_{n-6}\mathrm{C}_2-1=\dfrac{(n-6)(n-7)}{2}-2=\dfrac{n^2-13n+40}{2}=\dfrac{(n-5)(n-8)}{2}$ 이다.

iii) $\{2,1\}$일 때, $n-6$개의 칸 중에서 왼쪽에서부터 첫 번째 칸에 0을 2개 집어넣으면 조건을 만족하지 않으므로, 왼쪽에서 두 번째 칸부터 집어넣어야 한다. 즉, $n-7$개의 칸에 2개를 집어넣는 경우이므로, ${}_{n-7}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n-7)(n-8)}{2}$ 이다.

iv) $\{3\}$일 때, $n-6$개의 칸 중에서 왼쪽에서부터 첫 번째, 두 번째에 넣었을 때는 조건에 만족하지 않고, 세 번째부터 조건을 만족한다. 즉, $n-8$개의 칸에 1개를 집어넣는 경우이므로, ${}_{n-8}\mathrm{C}_1=n-8$이다.

i), ii), iii), iv)를 모두 더하면 0과 2를 조건에 맞게 배치한 경우는

$\dfrac{(n-6)(n-7)(n-8)}{6}+\dfrac{(n-5)(n-8)}{2}+\dfrac{(n-7)(n-8)}{2}+n-8=\dfrac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6}$ 이며, 이 값이 N이다.

①, ② 방법에 따라 함수 f의 개수는

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\times\dfrac{(n-3)(n-4)(n-8)}{6}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-8)}{36}$ 임을 알 수 있다.

[문제 2 Comment]

이번 시립대 문제에서 제일 어려운 문항이 아니었을까 생각된다. 하지만 제일 영양가있는 문제이기도 하다.

기대T는 4문제의 풀이와 답안작성을 약 50분 걸쳐 끝내고 여유롭게 놀다가
종료 10분 전에 실수를 발견하는 바람에 실전에선 ①의 풀이로 허겁지겁 재작성하여 제출했지만,
②의 풀이 역시 수능 후 상위권 대학 논술에서 한 번쯤 사용될 법한 '쓸만한 풀이'이므로 꼭 봐둘 것.

근데 지금 보니, ①의 풀이가 ②의 풀이보다 엄청 비효율적이진 않았다. 오히려 심플하게 잘 푼 느낌ㅎㅎㅎ
(난이도를 올린 변형문제를 연세대/한양대/이대 실전모의논술 중 한회분에 실을 예정이다.)

[문제 3] (100점)

(a) 미분가능한 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 $f(x)$ 밖의 점 Q를 이은 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 다음을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 수직임을 보이시오.

곡선 $y=f(x)$ 위의 모든 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq \overline{\mathrm{XQ}}$이다.

[sol. 기대T 현장풀이]

점 P, Q, X를 각각 $(t, f(t))$, (a, b) (단, $b \neq f(a)$), $(x, f(x))$라 하면
$\overline{\mathrm{PQ}} \leq \overline{\mathrm{XQ}} \Rightarrow (t-a)^2+(f(t)-b))^2 \leq (x-a)^2+(f(x)-b)^2$ 이므로
함수 $g(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2$ 는 $x=t$에서 극소가 된다. (극소의 정의)

또한 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로, $g'(t)=0$임을 알 수 있고
$g'(t)=2(t-a)+2f'(t)(f(t)-b)=0$ $\cdots$ⓐ, $f'(t) \times \dfrac{f(t)-b}{t-a}=-1$ (단, $t \neq a$)임을 알 수 있다.
이 때, $f'(t)$는 점 P에서의 접선의 기울기이며 $\dfrac{f(t)-b}{t-a}$는 직선 PQ의 기울기에 해당하므로 두 직선이 수직임을 알 수 있다.

한편, $t=a$일 때 ⓐ를 만족시키려면 $f'(t)=0$ ($\because f(t)=f(a) \neq b$) 이어야 한다.
점 P에서의 접선이 x축과 평행하며, 직선 PQ의 방정식은 $x=a$로 y축과 평행하므로 이 경우에도 두 직선이 수직 관계에 있음을 알 수 있다.

(b) 곡선 $y=x^2$ 위의 점을 점 P, 곡선 $y=-(x-6)^2$ 위의 점을 점 Q라고 할 때 $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하시오.

[sol. 기대T 현장풀이]
곡선 $y=x^2$를 x축 대칭시킨 후 x축의 양의 방향으로 6만큼 평행이동시키면 곡선 $y=-(x-6)^2$이 나오므로, 두 곡선은 점 R$(3,0)$에 대한 점대칭관계이다. (~~사실, 지금 보니 굳이 이 문장은 쓰지 않았어도 됐을 듯~~)

점 P$(t_1, {t_1}^2)$와 점 R$(3,0)$에 대하여 $2t_1 \times \dfrac{{t_1}^2-0}{t_1-3}=-1$일 때 선분 PR의 길이가 최소일 수 있고, 이 때의 t_1의 값은 1, 점 P는 $(1,1)$이다.
점 Q$(t_2, -(t_2-6)^2)$와 점 R$(3,0)$에 대하여 $-2(t_2-6)\times\dfrac{-(t_2-6)^2-0}{t_2-3}=-1$일 때 선분 PQ의 길이가 최소일 수 있고, 이 때의 t_2의 값은 5, 점 Q는 $(5,-1)$이다.

이 때, 점 P$(1,1)$, R$(3,0)$, Q$(5,-1)$은 모두 어떤 한 직선 위에 동시에 있음을 확인할 수 있으므로 선분 PQ의 최솟값은 $\sqrt{(1-5)^2+(1-(-1))^2}=2\sqrt{5}$이다.

[문제 3 Comment]
제일 감점이 심할 것으로 예상되는 문제이다.
논술을 준비한 학생들과 준비하지 않은 학생들의 격차가 제일 많이 벌어질 문제로 판단된다.

감점의 대표적 예시로는
① a번 문제에서 극소 또는 최소라는 단어 없이 마구잡이 미분
② a번 문제의 상황을 그래프로 설명한 경우 (원 그리는 것 포함)
③ b번 문제에서 점 (3, 0)을 거쳐 논리를 이어나갈 경우, 세 점이 한 직선 위에 있음을 반드시 언급 필요
(최소+최소=최소 의 논리를 쓸 때, 좌변의 최소가 동시에 벌어질 수 있음을 설명하는 장치에 해당하기 때문)

등등이 있다.

[문제 4] (100점)

함수 $y=f(x)$ $(x \geq 1)$는 다음을 만족한다.

모든 자연수 m에 대하여 $64^{m-1} \leq x < 64^m$ 일 때, $f(x)=8^m$

곡선 $y=\dfrac{1}{k^3}x^2$과 곡선 $y=f(x)$ 사이의 교점 개수를 a_k라 하자. $n=2^{300}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구하시오.

[sol. 1 기대T 현장풀이]

$i)$ 곡선 $y=\dfrac{1}{k^3}x^2$이 꽉찬 점 $(64^{m-1}, 8^m)$을 지날 때, $k=2^{3m-4}$ 이고

$ii)$ 곡선 $y=\dfrac{1}{k^3}x^2$이 빈 점 $(64^m, 8^m)$을 지날 때, $k=2^{3m}$ 이다.

($y=f(x)$ 그림 그리고, $i)$과 $ii)$에 맞도록 이차함수를 $k=2^2, 2^3, 2^5, 2^6, 2^8, 2^9 \cdots$ 일 때 그린 후 k값이 커질수록 y축으로부터 멀어지는 이차함수임을 설명)

따라서

$2^0 \leq k < 2^2$ 일 때 $a_k=1$, $2^2 \leq k < 2^3$ 일 때 $a_k=2$,

$2^3 \leq k < 2^5$ 일 때 $a_k=1$, $2^5 \leq k < 2^6$ 일 때 $a_k=2$,

$2^6 \leq k < 2^8$ 일 때 $a_k=1$, $2^8 \leq k < 2^9$ 일 때 $a_k=2$, $\cdots$ 임을 알 수 있으므로

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1\times 2^{300} + (2^3-2^2)+(2^6-2^5)+(2^9-2^8)+\cdots+(2^{300}-2^{299})$$

$$= 2^{300} + \frac{4\times(8^{100}-1)}{8-1} = \frac{11}{7}\times 2^{300} - \frac{4}{7} \text{ 이다.}$$

[sol. 2 조교 및 수강생 우수풀이]

$y=\frac{1}{k^3}x^2$과 $f(x)=8^m$이 만날 때 $\frac{1}{k^3}x^2=8^m$이 성립하며, 정리하면 $x=\sqrt{(2^m k)^3}$($\because$ $x\geq 1$)이다. $64^{m-1}\leq x<64^m$에 계산한 x를 넣으면 $64^{m-1}\leq\sqrt{(2^m k)^3}<64^m$이고, 각 항이 모두 양수이므로 각 항을 $\frac{2}{3}$제곱을 해주면 $4^{2(m-1)}\leq 2^m k<4^{2m}$이다.

k에 대해 부등식을 정리하면 $2^{3m-4}\leq k<2^{3m}$이다. 즉, k가 $2^{3m-4}\leq k<2^{3m}$의 범위에서 $y=\frac{1}{k^3}x^2$과 $f(x)=8^m$이 한 번 만난다.

$2^{3m-4}\leq k<2^{3m}$을 만족하는 자연수 k의 개수는 $2^{3m}-2^{3m-4}$로 구할 수 있으며, $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 $m=1$부터 $k=2^{300}$을 부등식 범위에 포함시키는 m까지의 값을 구하여 $2^{3m}-2^{3m-4}$를 모두 더해주는 것으로 구할 수 있다. 이 때, $k=1$일 때, 2^3-2^{-1}이므로 자연수의 개수는 2^3-1로 구할 수 있다. 또한, $n=2^{300}$에서 $m=101$에서도 만족하는 자연수 k의 개수를 구해주어야 하며 이는 $2^{300}-2^{299}+1$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k=(2^3-1)+\sum_{m=2}^{100}(2^{3m}-2^{3m-4})+(2^{300}-2^{299}+1)$

등비수열의 합 공식에 의해 식을 정리하면

(위의 식)$=(2^3-1)+\frac{15}{14}(2^{300}-2^3)+(2^{300}-2^{299}+1)$

$$=2^{300}\left(\frac{15}{14}+1-\frac{1}{2}\right)+2^3\left(1-\frac{15}{14}\right)$$

$$=\frac{1}{7}(11\cdot 2^{300}-4)$$

[문제 4 Comment]

개수세기가 수리논술에 나오는 몇 안되는 학교인데, 올해 모의논술에 이어 오후 기출에 기어코 나왔다.
그 놈의 경향성..★
물론 이번 문항은 개수세기 특유의 멍멍스러운 노가다가 특출난 아이디어는 필요없었다.
차분하게 잘 세면 되는 문항으로, 역대 기출 중 제일 할만한 개수세기에 해당한다. (또는, 이 문항을 개수세기로 생각하지 않은 학생들이 있을 수 있다.)

노파심에 얘기하지만, 수능 후 학교의 기출을 분석할 때 개수세기가 한 번이라도 나왔던 학교라면, 반드시 그 학교의 개수세기 경향성을 파악하고 시험에 들어가자.