

규 토
라이트
N 제

CONTENTS

규토 라이트 N제 오리엔테이션

책소개	6p
검토후기	8p
추천사	10p
규토 라이트 N제 100% 공부법	16p
규토 라이트 N제 추천 계획표	18p
규토 라이트 N제 학습법 가이드	26p
맺음말	30p

문제편

| 경우의 수 |

1. 여러 가지 순열과 중복조합		2. 이항정리	
Guide Step	35p	Guide Step	95p
01. 경우의 수 (고1 내용 복습)	36p	01. 이항정리	96p
02. 순열 (고1 내용 복습)	41p	Training_1 Step	103p
03. 조합 (고1 내용 복습)	44p	Training_2 Step	108p
04. 여러 가지 순열	51p	Master Step	111p
05. 중복조합	60p		
Training_1 Step	65p		
Training_2 Step	75p		
Master Step	91p		

| 확률 |

1. 확률의 뜻과 활용

Guide Step	115p
01. 확률의 뜻	116p
Training_1 Step	125p
Training_2 Step	133p
Master Step	145p

2. 조건부확률

Guide Step	149p
01. 조건부확률	150p
02. 사건의 독립과 종속	155p
Training_1 Step	161p
Training_2 Step	173p
Master Step	187p

| 통계 |

1. 확률분포

Guide Step	193p
01. 확률변수와 확률분포	194p
02. 이산확률변수의 기댓값과 표준편차	197p
03. 이항분포	202p
04. 정규분포	207p
Training_1 Step	219p
Training_2 Step	231p
Master Step	249p

2. 통계적 추정

Guide Step	253p
01. 모집단과 표본	254p
02. 표본평균의 분포	255p
03. 모평균의 추정	260p
Training_1 Step	263p
Training_2 Step	275p
Master Step	287p

| 빠른 정답 | 292p

CONTENTS

해설편

| 빠른 정답 | p

| 경우의 수 |

1. 여러 가지 순열과 중복조합

Guide Step	16p
Training_1 Step	21p
Training_2 Step	38p
Master Step	60p

2. 이항정리

Guide Step	74p
Training_1 Step	75p
Training_2 Step	77p
Master Step	80p

| 확률 |

1. 확률의 뜻과 활용

Guide Step	82p
Training_1 Step	83p
Training_2 Step	93p
Master Step	112p

2. 조건부확률

Guide Step	119p
Training_1 Step	120p
Training_2 Step	132p
Master Step	147p

| 통계 |

1. 확률분포

Guide Step	154p
Training_1 Step	158p
Training_2 Step	174p
Master Step	192p

2. 통계적 추정

Guide Step	196p
Training_1 Step	197p
Training_2 Step	211p
Master Step	225p

오리엔테이션

책소개

검토후기

추천사

규토 라이트 N제 100% 공부법

규토 라이트 N제 추천 계획표

규토 라이트 N제 학습법 가이드

맺음말

책소개

개념, 유형, 기출을 한 권으로 Compact하게

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과 개념, 실전 개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.

단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.

교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**rainig - 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여 수능최적화 자작으로 구성하였습니다.

기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.

단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. **T**rainig - 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.

필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.

실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. **M**aster step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.

과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도

1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야 하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

단순히 유형서가 아니라 생기초부터 점점 살을 붙여가며 기출킬러까지 다루는 올인원 교재입니다.
즉, 교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.
규토 라이트 N제 확통의 경우 총 638제이고
문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당 과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야 할지 갈피를 못 잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

검토후기

문지유 / 울산대학교 의학과

2024 규토 라이트 N제는 고3 학생들 뿐만 아니라 중학생, 고1, 고2 학생들이 선행학습을 할 때에도 활용하기 좋을 것 같아요. 개념 설명이 간단하면서도 명료하고 깔끔하게 되어 있으면서도, 중요한 포인트를 놓치지 않는 꼼꼼한 교재입니다. 개념 공부를 하며 바로바로 이해했는지 확인할 수 있는 예제 문제가 해설과 함께 중간중간 실려 있습니다. 기본 개념을 가지고 풀 수 있는 난이도가 그리 높지 않은 Guide Step 문제부터, 유형별로 개념을 적용하여 풀 수 있는 문제(Training - 1Step), 단원별 역대 기출들(Training - 2Step), 고난도를 연습할 수 있는 Master Step까지. 개념 공부와 함께 문제풀이를 곁들여 밸런스 있는 공부를 하기 최적화된 문제집이라고 생각합니다.

벌써 제가 규토 N제 교재 검토를 한지도 3년차에 접어들었네요. 최대한 꼼꼼히 검토하는 편인데도 항상 놓치는 게 있을까 떨리네요. 2023년 새해가 밝아 학년이 바뀌고, 나이도 어느덧 한 살 더 먹은 여러분이 규토 라이트 N제와 함께 새로운 마음으로 산뜻하게 공부하셔서, 이 교재를 풀면서 성장하는 것을 스스로 느꼈으면 좋겠습니다. 뿌듯한 한 해 되세요! 파이팅 :D

김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 울산대학교 의예과에 20학번으로 입학하여 의학과 2학년에 재학 중인 김태민입니다. 작년에 이어 올해도 검토를 맡게 되었는데요. 저의 N수 경험, 학원 조교 경험, 작년 문제집 검토 경험들을 통해 쌓아온 노하우를 바탕으로 수험생 여러분들에게 도움이 될 수 있도록 꼼꼼히 검토했습니다. 규토 라이트 N제 문제집을 검토할 때마다 가장 인상 깊은 점은 질 좋은 문제들과 난잡하지 않은 해설인 것 같아요. 현재 수능체제에 가장 적합한 문제들을 통해 여러분을 훈련시키고 해설을 통해 조심해야 하는 부분은 어디인지, 어떻게 문제를 접근해야 하는지 여러분에게 수능 수학 공부의 방향성을 제시합니다. 이 교재에 있는 문제들과 문제풀이를 반복 학습하면서 체화해 나가는 과정이 도움이 될 것이라 확신합니다. 이 책이 출판될 시점이면 본격적으로 새로운 마음으로 수험생 여러분들이 공부를 시작하는 단계일텐데요. 수능까지 충분히 많이 남았기에 너무 조급한 마음보다는 여유를 가지고 기본부터 잘 다듬어 가시길 바랍니다. 이 교재를 거처간 모든 수험생 여러분들에게 좋은 기운이 달기를 항상 응원하겠습니다!

정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 벌써 한 해의 입시가 끝나가고, 완연한 겨울이 되었네요. 입시가 끝나자마자 새로운 문제집이 출판되고, 풀린다는 생각을 하니 저자분의, 수험생들의 열의가 느껴지는 것만 같습니다.

규토 라이트 N제 확률과 통계는 재미있는 교재입니다. 확률과 통계는 문제를 어떻게 읽는지가 굉장히 중요합니다. 순열, 조합, 중복순열, 중복조합. 이 도구들을 어떻게 활용하는지 파악하는 것이 확률과 통계에서 가장 어렵고, 중요한 부분입니다. 이번 교재에서는 이 접근방법을 굉장히 재미있게 풀어서 제시합니다. 너무 어렵지 않게, 그러면서도 내용이 모자라지도 않게 만들어졌으며, 확률과 통계에 익숙한 학생에게는 알고 있던 내용을 꼼꼼히 확인할 수 있는 기회를, 그렇지 않은 학생들에게는 확률과 통계와 충분히 친해질 수 있는 기회를 제공하는 교재라고 생각합니다.

과정은, 결과로 미화된다는 생각을 종종 합니다. 여러분의 올 한해 수험 생활은 분명 쉽지 않을거예요. 공부의 스트레스, 불안감... 많은 것들이 여러분을 괴롭힐 것 같습니다. 하지만 올 한해가 끝났을 때, 그 모든 과정이 좋은 기억으로 남을 수 있을 만큼 좋은 결과를 얻을 수 있으시기를 기원합니다. 감사합니다.

조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 라이트 N제는 개념 설명 + 기출 문제 + 자작 N제로 구성되어 있어 세 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 독학서입니다. 특히 수능 대비에 알맞은 컴팩트한 볼륨의 Guide step(개념 익히기편)에서 수능에 자주 출제되는 중요한 개념을 빠르게 훑고 문제 풀이로 넘어갈 수 있습니다. Guide step에서는 실전에서 사용할 수 있는 유용한 테크닉과 학생들이 개념을 공부하면서 궁금할 수 있는 포인트까지 따로 자세하게 설명해주어서 교과서나 시중 개념서에서 해결할 수 없는 의문점까지 해결할 수 있습니다.

기출 문제에 추가로 자작 문제가 포함되어 있어서 기출 문제가 부족한 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 활용 단원에서 트렌디한 평가원 스타일의 문제를 다양하게 풀어볼 수 있다는 것은 규토 라이트 N제만의 큰 장점이라고 생각합니다.

저자의 TIP이 문제집과 해설집 곳곳에서 여러분들을 도와줄 것입니다. 규토 시리즈 특유의 유쾌한 해설이 무척 상세해서 규토 라이트 N제로 공부하다 보면 친절한 과외선생님이 옆에서 설명해주는 듯한 느낌을 받을 수 있을 것입니다. 특히 책 안에 나와있는 규토 시리즈의 100% 공부법을 참고하면 수학 공부 방법에 고민이 많은 학생들에게 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 수능 수학 영역이 수 1, 2 공통영역과 선택영역으로 분리된 지 어느덧 2년이 지났습니다. 이전 수능과 달리 최근에는 준킬러 수준 이상의 문제들이 많아졌습니다. 어려운 문제들이 많아진 만큼 수험생들의 부담감도 당연히 커졌습니다. 즉, 긴장되는 시험장 안에서 '멘탈' 싸움이 중요해졌습니다. 이러한 '멘탈' 싸움에서 극복해내려면 컨디션 관리와 자기 페이스 유지도 중요하지만 무엇보다도 어렵고 처음 보는 문제를 보았을 때 당황하지 않고 차근차근 풀어나가는 능력이 있어야 합니다. 규토 라이트 N제 시리즈는 이러한 능력을 기르게 해주는 문제집입니다. Training 1 Step에서 저자가 최신 수능 트렌드를 분석하면서 만든 자작문제들을 통해 실력을 기를 수 있고, 2 Step에서 기른 실력을 기출문제에 바로 적용할 수 있습니다. 문제의 난이도가 절대 쉽지만은 않지만, 저자의 100% 공부법을 통한 꾸준한 반복과 복습을 하면, 어느새 준킬러 수준 이상의 문제들을 술술 푸는 자신을 발견할 겁니다. 올해 수험생 여러분 모두 건승을 기원합니다!

규토 라이트 N제와 함께 1년 내내 수학 모의고사 1등급!! (김준한)

- 4등급부터 시작해서 현재 수학 백분위 99%까지 달성 후기 -

안녕하세요~ 저는 작년 고1 때는 모의고사 성적이 3,4등급에 머물러 있다가 올해 규토 라이트 N제 수1, 2로 공부하면서 2022년에 시행된 고2 6, 9, 11월 모의고사에서 모두 1등급을 쟁취하게 되어 추천사를 작성하게 되었습니다. 제가 이 책을 처음 접했을 때 책의 구성도 물론 좋았지만 가장 눈에 들어온 것은 공부법이었습니다. 성적대가 낮은 학생들이 공부해도 큰 효과를 볼 수 있는 책이지만 평소에 수학 공부법에 회의감을 가지고 있는 학생들도 공부하면 더 큰 효과를 볼 수 있을 거라고 생각합니다!

고등학교 1학년 때의 저는 수학을 아주 잘하지도 못 하지도 않는 학생이었습니다. 단지 다다익선이라는 말처럼 시중에 나와 있는 문제집을 다 풀어 보며 성적이 잘 나오겠지하며 기대하는 학생에 불과했습니다. 그랬던 성적이 3등급이었고 저는 심각한 고민에 빠졌습니다. 그러던 도중에 한 커뮤니티 사이트에서 '규토 라이트 N제' 후기를 보았습니다. 후기를 읽어보며 나도 저런 드라마틱한 성장을 이뤄낼 수 것 같다는 느낌을 받았고 그 중심인 '100% 공부법'을 알게 되어 바로 책을 구입하게 되었습니다.

규토 라이트 N제를 보면서 구성이 참 놀라웠습니다. 현 교육과정에 따른 개념이 모두 수록되어 있을 뿐만 아니라 규토님 특유의 테크니컬한 팁들이 다 들어 있어서 자작문제 (t1)에 적용하여 체화를 시키고 이에 따라 배운 것들을 기출문제 (t2)에 또 적용할 수 있어 개념-기출의 괴리감을 최소화 시켜준다는 장점이 있습니다. 그리고 규토 라이트 N제의 고난도 문제의 집합이라고 할 수 있는 마스터 스텝 (mt) 인데 저는 개인적으로 푸는 데 너무 재밌었습니다. 저는 문제를 풀면서 규토쌤이 괜히 문제 배치를 마지막에 하신 게 아니구나라는 것을 느꼈습니다. 이 문제들은 약간 방금 전에 언급한 t1,t2 문제들을 믹스 시킨 문제, 즉 기본 예제 들의 집합이라고 느꼈습니다. 마스터 스텝 문제까지 책의 공부법으로 완전히 흡수시켜야 비로소 책의 취지에 맞게 안정적인 1등급에 도달한다고 느끼게 되었습니다.

이제 공부법에 대해 얘기해보려 합니다. 사실 제가 제일 강조하고 싶은 부분입니다!! 제 성적향상의 근원이기도 합니다ㅎ 올해 3월달... 저의 수학 성경책을 받은 날이었죠.. 저는 책과 몰아일체가 되겠다는 마음가짐으로 임했습니다. 규토 선생님께서 강조하시는 수학 공부법이 처음에는 어색했지만 계속 적용해보니까 수능 수학에 가장 이상적이고 적합한 방법이라는 것을 깨달았습니다. 제가 세 번의 모의고사에서 1등급을 받은 그 공부법! 100% 공부법의 핵심은 "누군가에게 설명할 수 있다"입니다. 사실 혼자께서는 문제를 잘 푸는 거랑 어떤 차이냐고 물으실 수 있는데 사실은 엄청난 차이가 있다고 생각합니다. 문제를 완벽하게 설명하려면 풀이를 써 내려갈 때 개념 간의 논리를 정확하게 이해하고 남을 이해시킨다는 마음으로 문제를 정확히 자기것으로 만들어야 합니다. 저는 이 과정이 정말 힘들었습니다. 하지만, 계속 거듭하고 묵묵히 하다보니 가속도가 붙더라고요! 내년에 공부하실 2024 규토 수험생 분들도 이 부분을 강조하며 공부하시면 충분히 좋은 결과 있으실 거라고 믿습니다!!

마지막으로 규토 선생님! 제 수학 성적을 눈부시게 끌어올려 주셔서 감사합니다! ㅎㅎ

수능 수학의 시작과 마무리, 규토 라이트 N제 (오세욱)

- 규토 N제 수1, 수2, 미적분 풀커리(라이트~고득점)로 수능 미적분 백분위 98% 달성 후기 -

저는 현역 때 운 좋게 대학입시에 성공해 인서울 대학에 합격했지만 수능에 미련이 남아있는 학생 중 한명이었습니다. 수학을 잘한다고 생각하고 자부심을 가지고 있었지만 막상 수능에서는 3등급 백분위 78을 받았습니다. 수능 시험장에서 문제를 풀면서 '나는 개념을 놓치고 있고 조건을 해석할 줄 모르는구나'를 깨달았습니다.

그렇게 대학에 진학했다는 생각으로 놀며 2020년을 보냈고 2021년이 되자 이대로 끝내면 후회가 남을 것 같다는 생각에 다시 한번 입시 속으로 뛰어들었습니다. 대학을 병행하며 진행하고 싶었기에 과외나 학원을 다니기에는 시간이 촉박하다고 판단하여 구매하게 된 책이 바로 과외식 해설을 담은 '규토 라이트 N제' 입니다.

규토 라이트 N제를 만나게 되면서 앞에 적힌 공부방법에 따라 개념 부분과 개념형 유제부터 자세히 읽고 풀어보며 사소하지만 실전 문제풀이에 도움이 되는 팁을 얻었습니다. 또한 함께 실린 자작문제와 기출문제에 개념을 적용해 풀며 답안지와 내 풀이의 차이점을 비교하였고 잘못되게 풀이한 부분이 있다면 다시 한번 적어보며 틀린문제는 풀이의 길을 외울 정도로 반복해서 풀었습니다. 솔직히 이러한 과정이 빠르고 쉽다 한다면 거짓말입니다. 처음 시작할 때는 막막할 정도로 문제가 벽으로 느껴졌고 모르면 아직도 모르는게 많다는 것에 화가 나기도 했습니다. 하지만 한 문제, 한 단원 넘어갈 때마다 확실하게 개념이 탄탄해지고 새로운 문제를 만나도 개념을 중심으로 풀이가 진행되는 경우가 많아 자신감과 재미를 느끼게 되었습니다. 이렇게 수1, 수2부터 미적분까지 3권을 모두 마무리하고 반복하여 풀이하다 보니 평가원 시험에서 고정적으로 1등급을 받게 되었습니다.

규토 라이트 N제는 이름과 달리 절대 '라이트' 하지만은 않습니다. 선택과목 체재에서 규토 라이트 N제는 시작이며 마무리인 단계입니다. 기출을 이미 많이 접해본 N수나 고3분들 중 컴팩트하고 완전하게 개념과 기출을 정리하고 싶은 분들부터 수능 수학을 처음으로 공부해 개념을 탄탄하게 쌓고 싶은 분들까지 규토 라이트 N제를 자신있게 추천드립니다.

[중요] 만약 책을 구매하게 된다면, 규토 선생님의 방법으로 공부하세요.

추신) 여담으로 타 문제집(썬)과 규토 라이트N제를 비교하는 글이 많아 두 문제집 모두 풀어본 입장에서 남긴다면 해설의 자세함, 친절도, 수능 수학을 할 때 필요한 문제의 질, 개념의 자세함 모두 규토 라이트 N제가 좋다고 생각합니다. 그리고 N제라는 이름 때문에 그런지 몰라도 두 책의 목적은 완전하게 다른데 비교하는 경우가 많은 것 같습니다. 이 책은 자세한 개념부터 심화문제 (30번)까지 모두 다룹니다. 과장 없이 미적분 2022평가원 문제 모두 이 책에 있는 문제를 규토 선생님의 방식으로 다뤘다면 모두 맞출 수 있었다고 생각합니다.

추천사

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데요. 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데요. 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다.

첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻘한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데요, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사실 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같이 느껴질 때 비로소 이해한 것'이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1, 2학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

추천사

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해야겠다는 생각을 했습니다. 어쩌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산 문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까. 교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에서 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제양과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

개념익히기와 <1 step> 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 <2 step> 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수 있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지 않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니다. 하지만 이 단계부터 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하신분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 <2 step>만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니다. 꼭 여러 번 회독해서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리할 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니다. <2 step>를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이었습니다.) 역시나 기출의 반복이었습니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니다.

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전날까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니더라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니다. 시간이 조금만 남았다더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학적 힘드신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 콘텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수 있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다. 코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다. 많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)”이 마치 과외를 받는 기분 이 되도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다. 규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갇아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했었던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다.

늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다!!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

경우의 수

1. 여러 가지 순열과 중복조합

2. 이항정리

01 경우의 수 (고1 내용 복습)

성취 기준 | 합의 법칙이란 무엇일까?

개념 파악하기 (1) 합의 법칙이란 무엇일까?

합의 법칙

일반적으로 두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 가 일어나는 경우의 수를 m , 사건 B 가 일어나는 경우의 수를 n 이라 하면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 $m+n$ 이다. 이것을 **합의 법칙**이라 한다.

Tip 1 합의 법칙은 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는 셋 이상의 사건에 대해서도 성립한다.

Tip 2 간단히 말해서 사건이 일어나는 경우를 **case분류**한 뒤 각각의 경우를 더해준다고 생각하면 된다. 여기서 point는 빠짐없이 세는 것이다.

ex 서로 다른 3개의 빵 A, B, C 와 서로 다른 2개의 음료수 P, Q 중 하나를 선택하는 경우의 수를 구하시오. 하나를 선택할 때, 빵을 선택하는 경우와 음료수를 선택하는 경우 이렇게 2가지로 case분류할 수 있다. (하나를 선택할 때, 빵과 음료수 이외의 case는 가능하지 않다는 것이 point이다.)

- ① 빵을 선택하는 경우 = 3가지
- ② 음료수를 선택하는 경우 = 2가지

따라서 $3+2=5$, 총 5가지이다.

직접 다 센다!

일일이 직접 나열하여 세는 것이 오히려 문제를 푸는 강력한 Tool이 될 수 있다. 효율적으로 세기 위해서는 **나름의 체계와 Technique**이 필요하다.

- ① 기준을 정해서 체계적으로 센다. (개수, 크기 순서, 사전식 배열(알파벳 순서) 등등)

ex1 검은색 공 3개, 흰 공 2개 중 2개의 공을 뽑는 경우의 수를 구하시오.

검은색 공의 개수에 따라 case분류할 수 있다.

- i) 검은색 0개일 때, 흰 공 2개
- ii) 검은색 1개일 때, 흰 공 1개
- iii) 검은색 2개일 때, 흰 공 0개

따라서 총 3가지이다.

■ 예제 1

5명으로 이루어진 어떤 그룹에서 2명을 뽑아 발표자와 사회자를 정하는 경우의 수를 구하시오.

|| 풀이 ||

서로 다른 5개에서 2개를 뽑아 배열하는 경우와 같은 구조이므로 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ 이다.

Tip

서로 다른 n 개 중에 r 개를 선택하여 **배열**까지 해준다는 것이 point이다.

여기서 배열이라고 쓴 이유가 낯설게 느껴질 수도 있는데 2명을 뽑아 발표자와 사회자를 정하는 경우의 수가 2명을 일렬로 줄을 세우는 경우의 수와 구조가 같기 때문이다. 선택된 2명을 A, B 라 할 때, 발표자와 사회자를 정하는 경우의 수는 아래와 같다. (발표자 바로 밑에 A 가 있으면 발표자가 A 라는 의미)

발표자	사회자		발표자	사회자
A	B		B	A

여기서 발표자와 사회자를 정하는 경우의 수를 구할 때, 첫 번째 줄에 있는 발표자와 사회자는 고정시키고 두 번째 줄에 있는 $A B$ 를 배열해준다고 생각하면 된다.

예를 들어 3명이 서로 다른 3개의 의자에 앉는 경우의 수를 구할 때도 위와 같은 논리를 적용시킬 수 있다.

세 사람을 A, B, C 이라 하고 서로 다른 세 의자를 ①, ②, ③ 이라 하자.
(A 바로 밑에 ①이 있으면 A 가 ①번 의자에 앉는다는 의미)

A	B	C		A	B	C																
①	②	③		①	③	②		②	①	③		②	③	①		③	①	②		③	②	①

3명이 서로 다른 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 첫 번째 줄에 있는 $A B C$ 는 고정시키고 두 번째 줄에 있는 ① ② ③을 배열해주는 경우와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다.

매칭시키는 경우의 수는 자주 출제되므로 위와 같은 논리를 확실히 알아두도록 하자.

■ 예제 2

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리 자연수를 만들 때, 400보다 큰 자연수의 개수를 구하시오.

|| 풀이 ||

400보다 크려면 두 가지 경우가 가능하다.

① 백의 자리가 4인 경우 \Rightarrow 1, 2, 3, 5 중에서 2개를 선택하여 십의 자리와 일의 자리 배열 = ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

② 백의 자리가 5인 경우 \Rightarrow 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 선택하여 십의 자리와 일의 자리 배열 = ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

따라서 합의 법칙에 의하여 $12 + 12 = 24$ 개이다.

03 조합 (고1 내용 복습)

성취 기준 | 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

개념 파악하기 (4) 조합이란 무엇일까?

조합

세 개의 문자 a, b, c 중에서 순서를 생각하지 않고 두 개를 택하는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

$$(a, b), (a, c), (b, c)$$

이처럼 서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 $r(r \leq n)$ 개를 택하는 것을 n 개에서 r 개를 택하는 **조합**이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n C_r$ 와 같이 나타낸다.

Tip 서로 다른 것의 개수 $\leftarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} C_r \rightarrow$ 택하는 것의 개수

조합의 수 ${}_n C_r$ 를 구하는 방법

네 자연수 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 조합의 수는 ${}_4 C_3$ 이고, 그 각각에 대하여 다음과 같이 3!가지의 순열을 만들 수 있다.

조합 ${}_4 C_3$		순열 ${}_4 P_3$
(1, 2, 3)	→	123, 132, 213, 231, 312, 321
(1, 2, 4)	→	124, 142, 214, 241, 412, 421
(1, 3, 4)	→	134, 143, 314, 341, 413, 431
(2, 3, 4)	→	234, 243, 324, 342, 423, 432

그러므로 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 ${}_4 C_3 \times 3!$ 이다.

이는 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 순열의 수 ${}_4 P_3$ 과 같으므로 ${}_4 C_3 \times 3! = {}_4 P_3$ 이다.

따라서 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}_4 C_3 = \frac{{}_4 P_3}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

서로 다른 n 개에서 $r(0 < r \leq n)$ 개를 택하는 조합의 수는 ${}_n C_r$ 이고, 그 각각에 대하여 r 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$ 이다. 그런데 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 ${}_n P_r$ 이므로 ${}_n C_r \times r! = {}_n P_r$ 이다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이때 $r=0$ 일 때, ${}_n C_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$ 이 성립하도록 ${}_n C_0 = 1$ 로 정의한다.

개념 파악하기

(6) 조를 나누는 경우의 수는 어떻게 구할까? (고1 내용 복습)

분할 (조합을 이용하여 조를 나누기)

서로 다른 여러 개의 물건을 몇 개의 묶음으로 나누는 것을 **분할**이라 한다.

서로 다른 n 개의 물건을 p 개, q 개, r 개 ($p+q+r=n$)의 세 묶음으로 분할하는 방법의 수를 예로 들어보자.

① p, q, r 가 모두 다른 수이면

$$\Rightarrow {}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r$$

ex 4개의 물건 a, b, c, d 를 1개, 3개로 분할하는 경우의 수를 구하시오.

$$a-bcd, b-acd, c-abd, d-abc$$

a, b, c, d 에서 1개를 뽑고, 나머지 3개에서 3개를 뽑으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4 C_1 \times {}_3 C_3 = 4 \times 1 = 4$ 이다.

② p, q, r 중 어느 두 수가 같으면

$$\Rightarrow {}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r \times \frac{1}{2!}$$

ex 4개의 물건 a, b, c, d 를 2개, 2개로 분할하는 경우의 수를 구하시오.

$$ab-cd = cd-ab, ac-bd = bd-ac, ad-bc = bc-ad$$

a, b, c, d 에서 2개를 뽑고, 나머지 2개에서 2개를 뽑으면 되므로 ${}_4 C_2 \times {}_2 C_2$ 이다.

그런데 이 경우 위와 같이 같은 것이 2!개씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$${}_4 C_2 \times {}_2 C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3 \text{이다.}$$

Tip

6개의 물건 a, b, c, d, e, f 를 3개, 3개로 분할하는 경우의 수는

$${}_6 C_3 \times {}_3 C_3 \times \frac{1}{2!} \text{이다. } \times \frac{1}{3!} \text{을 하지 않도록 유의해야 한다.}$$

$abc-def = def-abc$ 에서 알 수 있듯이 같은 것이 2!개씩 있으므로 2로 나누어야 한다.

③ p, q, r 의 세 수가 모두 같으면

$$\Rightarrow {}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_r C_r \times \frac{1}{3!}$$

ex 6개의 물건 a, b, c, d, e, f 를 2개, 2개, 2개로 분할하는 경우의 수를 구하시오.

a, b, c, d, e, f 에서 2개를 뽑고, 나머지 4개에서 2개를 뽑고, 나머지 2개에서 2개를 뽑으면 되므로

$${}_6 C_2 \times {}_4 C_2 \times {}_2 C_2 \text{이다.}$$

$$ab-cd-ef = ab-ef-cd = cd-ab-ef = cd-ef-ab = ef-ab-cd = ef-cd-ab$$

그런데 이 경우 위와 같이 같은 것이 3!개씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$${}_6 C_2 \times {}_4 C_2 \times {}_2 C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15 \text{이다.}$$

■ 예제 10

서로 다른 4개의 상자 A, B, C, D에 서로 다른 3개의 공을 넣는 경우의 수를 구하시오.

(단, 한 상자에 공을 여러 개 넣을 수 있다.)

|| 풀이 ||

공에게 물어본다. 서로 다른 4개의 상자 중 어디에 갈래? 4가지

공 a 공 b 공 c

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

따라서 $4^3 = 64$ 이다.

Tip

3^4 인지 4^3 인지 헷갈릴 수 있다. 물론 문제를 보자마자 $4P_3 = 4^3$ 인 것이 당연히 느껴진다면 더할 나위 없이 좋겠지만 현실적으로 그렇게 생각하기 쉽지만은 않다.

헷갈리지 않기 위한 다양한 방법이 존재하지만 필자가 추천하는 판별법은 다음과 같다.
이름하여 “**몰빵 판별법**”

먼저 공한테 어디가고 싶니?라고 물어본다면 4^3 가지 중에 다음과 같은 경우가 가능하다.

공 a 공 b 공 c
A A A

즉, 모든 공들을 상자 A에 넣는 경우이다. (몰빵)
이러한 상황은 가능하므로 4^3 이 맞다.

반면 상자한테 어디가고 싶니?라고 물어본다면 3^4 가지 중에 다음과 같은 경우가 가능하다.

상자A 상자B 상자C 상자D
공 a 공 a 공 a 공 a

즉, 공 a 를 네 상자에 모두 넣는 경우이다. (몰빵)
이러한 상황은 불가능하므로 3^4 이 될 수 없다.

■ 개념 확인문제 5

서로 다른 종류의 사탕 5개를 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

■ 예제 13

방정식 $x+y+z=5$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) 음이 아닌 정수해의 개수
- (2) 양의 정수해의 개수

|| 풀이 ||

(1) 방정식 $x+y+z=5$ 의 음이 아닌 정수해의 하나인 $x=2, y=2, z=1$ 의 경우는

$xyyzz$ 와 같이 나타낼 수 있다.

따라서 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 5개를 택하는

중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2!} = 21$ 이다.

Tip1

방정식의 해를 순서쌍으로 나타내면 $(2, 2, 1) \Leftrightarrow xy y z z$ 와 같이 일대일대응으로 볼 수 있다.

즉, $x=2, y=2, z=1$ 를 각각 x 를 두 번, y 를 두 번, z 를 한 번 선택하는 것과 같다고 생각하면 된다.

Tip2

방정식 $x_1+x_2+\dots+x_n=r$ 의 음이 아닌 정수해의 개수를 구할 때,

서로 다른 문자의 개수를 H 의 왼쪽에 써주고 $({}_nH)$

r 를 H 의 오른쪽에 써준다고 기억하면 편하다. (H_r)

$\therefore {}_nH_r$

(2) 방정식 $x+y+z=5$ 의 양의 정수의 해의 개수는 $x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$ 로 놓으면

방정식 $x'+y'+z'=2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

따라서 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x', y', z' 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$ 이다.

Tip

방정식 $x+y+z=n$ (n 은 자연수)의 해의 개수를 중복조합으로 해석하기 위해서는

x, y, z 가 모두 0 이상인 정수이어야 한다. 만약 $x=x'+1$ 라 두면 $x'=0, 1, 2, 3, \dots$ 일 때, 각각 $x=1, 2, 3, 4, \dots$ 에 대응되고 x' 는 0 이상인 정수이므로 중복조합을 사용할 수 있다.

만약 x 가 $x \geq 2$ 인 정수이면 $x=x'+2$ ($x' \geq 0$)로 치환하면 되고

x 가 양의 정수 중 짝수($x=2, 4, 6, \dots$)이면 $x=2x'+2$ ($x' \geq 0$)로 치환하면 된다.

■ 개념 확인문제 9

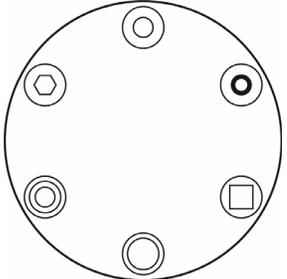
방정식 $x+y+z=4$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) 음이 아닌 정수해의 개수
- (2) -1 이상의 정수해의 개수

1 Theme 원순열

001

서로 다른 6개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



002

3쌍의 남녀 커플이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 커플끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

003

남자 3명과 여자 4명이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 남자끼리 이웃하지 않게 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

004

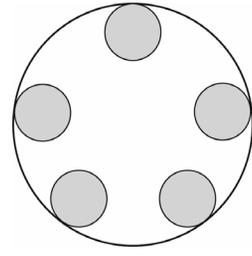
어느 고등학교에서 1학년 학생 1명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명이 일정한 간격으로 놓인 원탁에 둘러앉으려고 한다. 1학년 학생의 옆에 적어도 한 명의 3학년 학생이 앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

005

남자 4명과 여자 4명이 일정한 간격을 두고 원탁에 둘러앉을 때, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

006

서로 같은 접시를 일정한 간격을 두고 원형으로 놓은 원 모양의 식탁과 김치, 콩나물무침, 가지볶음을 포함한 서로 다른 반찬 7개가 있다. 이 서로 다른 반찬 7개 중에서 김치, 콩나물무침, 가지볶음을 포함하여 5개를 선택하고 이 5개의 반찬 모두를 일정한 간격으로 식탁에 올려놓을 때, 김치와 가지볶음이 콩나물무침과 모두 이웃하게 놓여 있는 경우의 수를 구하시오.
(단, 한 접시에는 한 가지의 반찬만 올려놓고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



| 042



다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

- (가) $a+b+c+d+e=6$
 (나) $a+b < 3$

| 043



다음 조건을 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하시오.

- (가) $x+y+z+w=9$
 (나) $xy > 0$

| 044



다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e, f 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수를 구하시오.

- (가) $10 = ab + c^2$
 (나) $d + e + f = ab + c$

| 045



다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하시오.

- (가) $x+y+z+w=10$
 (나) $xy \neq z^2$

| 046



주사위를 연속해서 3번 던질 때, 나오는 눈의 수를 순서대로 x, y, z 라고 하자. 다음 조건을 만족시키는 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오.

- (가) $\frac{80}{x+y+z}$ 는 자연수이다.
 (나) $(x+y+z)$ 의 양의 약수의 개수는 4이다.

| 047



같은 종류의 \spadesuit 모양의 카드, 같은 종류의 \heartsuit 모양의 카드, 같은 종류의 \clubsuit 모양의 카드 중에서 각 모양의 카드를 1개 이상씩 고르면서 카드의 총 개수가 8 이하가 되도록 고르는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 모양의 카드는 충분히 많다.)

Training – 2 step

필수 유형편

-
1. 여러 가지 순열과 중복조합
-

118 | 2022학년도 수능예비시험 확통

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $a+b+c+d=12$
 (나) $a \neq 2$ 이고 $a+b+c \neq 10$ 이다.

119 | 2017년 고3 7월 교육청 나형

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 네 자리의 홀수이다.
 (나) 각 자리의 합이 8보다 작다.

120 | 2020학년도 수능 가형

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
 (나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

121 | 2022학년도 고3 6월 평가원 확통

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수를 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d 라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

- ① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

122 | 2022학년도 고3 9월 평가원 확통

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [4점]

- (가) $f(3)+f(4)$ 는 5의 배수이다.
 (나) $f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(3)$ 이다.
 (다) $f(4) < f(5)$ 이고 $f(4) < f(6)$ 이다.

- ① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

123 | 2023학년도 고3 6월 평가원 확통

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $f(f(1))=4$
 (나) $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$

Master step

심화 문제편

1. 여러 가지 순열과 중복조합

144 | 2022학년도 사관학교 학통

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는? [4점]

- (가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.
 (나) 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 1$ 이다.

- ① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

145 | 2023학년도 고3 9월 평가원 학통

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 함수 $f: X \rightarrow X$ 에 대하여 함수 f 의 치역을 A , 합성함수 $f \circ f$ 의 치역을 B 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $n(A) \leq 3$
 (나) $n(A) = n(B)$
 (다) 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 이다.

146 | 2023학년도 수능 학통

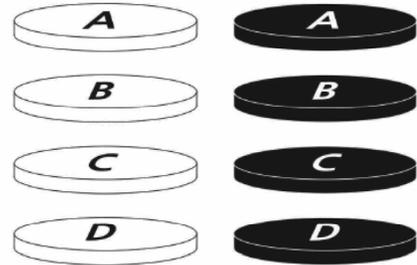
집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 9 이하의 모든 자연수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$ 이다.
 (나) $1 \leq x \leq 5$ 일 때 $f(x) \leq x$ 이고, $6 \leq x \leq 10$ 일 때 $f(x) \geq x$ 이다.
 (다) $f(6) = f(5) + 6$

147 | 2022년 고3 3월 교육청 학통

흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
 (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



148 | 2021학년도 수능 기형

네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
 (나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4 이상이다.
 (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

수학적 확률

어떤 시행에서 사건 A 가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A 의 확률이라 하고, 이것을 기호로 $P(A)$ 와 같이 나타낸다.

일반적으로 어떤 시행에서 표본공간 S 에 대하여 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A 가 일어날 확률은

$$P(A) = \frac{\text{(사건 } A \text{의 원소의 개수)}}{\text{(표본공간 } S \text{의 원소의 개수)}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

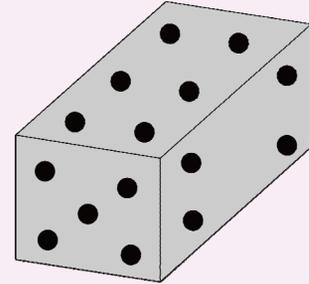
이다. 이 확률을 사건 A 가 일어날 **수학적 확률**이라고 한다.

Tip

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때라는 전제조건이 중요하다.

오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 주사위를 던졌을 때, 1이 적힌 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 일까?

정육면체와는 달리 오른쪽 그림의 직육면체는 각 면에 적힌 눈이 나올 가능성이 모두 동일하지 않기 때문에 1이 적힌 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이 될 수 없다.



다른 예시를 살펴보자.

주머니 속에 흰 공 2개, 검은 공 1개가 있다.

이 주머니 속에서 1개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공일 확률을 구하시오.

(흰1, 흰2, 검)으로 보면 근원사건의 발생가능성이 $\frac{1}{3}$ 로 동일하기 때문에 답은 $\frac{\text{흰1} + \text{흰2}}{\text{흰1} + \text{흰2} + \text{검}} = \frac{2}{3}$ 이다.

그런데 여기서 의문이 들 수 있다. (흰, 검)이니 왜 $\frac{1}{2}$ 은 답이 되지 않을까?

$\frac{1}{2}$ 이 아닌 이유는 “각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때”라는 전제조건에 위배되기 때문이다. 흰 공이 나타날 확률은 $\frac{2}{3}$ 이고 검은 공이 나타날 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

즉, 근원사건이 일어날 가능성이 동일하지 않기 때문에 위와 같이 구한 확률은 수학적 확률이 될 수 없다. 따라서 $\frac{\text{흰 공}}{\text{흰 공} + \text{검은 공}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 이라고 할 수 없다.

그런데 같다고 보고 (흰1 흰2 가 아니라 모두 같은 흰 색으로 본다는 뜻) 확률계산을 해도 답이 같을 때가 존재한다. 그 때는 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같다는 전제조건을 만족시켰을 때이다.

ex 1, 1, 2 를 일렬로 나열할 때, 2가 가운데 올 확률을 구하시오.

풀이1) 1을 서로 같게 보기

(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1) 이 나타날 확률은 모두 $\frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$ 으로 동일하므로

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같다는 전제조건을 만족시킨다.

따라서 $\frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{1}{3}$ 이다.

문제를 어떤 식으로 출제하느냐에 따라 같게 보았을 때 답이 틀리도록 설정할 수 있다. 솔직히 실전적으로 봤을 때 위 문제 풀이1)과 같이 근원사건이 일어날 가능성이 같다는 것이 자명한 경우를 제외하면 각 근원사건이 일어날 가능성이 동일한지 매번 따질 수는 없다.

따라서 확률 계산할 때는 같은 것도 서로 다르게 보고 계산하도록 하자.

풀이2) 1을 서로 다르게 보기

$1_a, 1_b, 2$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수 $3!$ 이고 양 끝에 $1_a, 1_b$ 자리 바꾸기 $2!$ 이므로

$\frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$ 이다.

■ 예제 1

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4가 될 확률을 구하시오.

|| 풀이 ||

표본공간을 S 라 하면

$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ 이므로 $n(S) = 36$

나오는 눈의 수의 합이 4인 사건을 A 라 하면

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ 이므로 $n(A) = 3$

따라서 구하고자 하는 확률은

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 이다.

■ 개념 확인문제 2

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던질 때, 뒷면이 한 번 나올 확률을 구하시오.

2 Theme 수학적 확률-순열과 조합을 이용하여 세기

009

어느 블로그에는 10개의 포스트가 기재되어있다. 이 블로그에서 각각의 포스트마다 하나씩 붙은 본문광고 위치를 조사하였더니 상(上)이 2개, 중(中)이 5개, 하(下)가 3개이었다. 이 블로그에 기재된 10개의 포스트 중에서 임의로 2개를 뽑을 때, 포스트에 붙은 본문광고 위치가 같을 확률은?

- ① $\frac{11}{45}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{13}{45}$
- ④ $\frac{14}{45}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

010

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않게 나열될 확률은 p 이다. $50p$ 의 값을 구하시오.

011

학년이 모두 다른 남학생 3명, 학년이 모두 다른 여학생 2명으로 구성된 어느 조가 발표 순서를 정하려고 한다. 한 명씩 나가서 발표할 때, 성별이 같은 학생들끼리는 학년이 높은 순서대로 발표할 확률은?

- ① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
- ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

012

주머니 A에는 1과 -1이 적힌 구슬이 각각 3개씩 모두 6개 들어있고, 주머니 B에는 1과 -1이 적힌 구슬이 각각 2개씩 모두 4개가 들어 있다. 두 주머니에서 각각 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내서 버릴 때, 각 주머니에 남아있는 구슬들에 적힌 숫자들의 곱이 서로 같을 확률은 p 이다. $30p$ 의 값을 구하시오.

079 | 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

방정식 $a+b+c=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c) 가

$$a < 2 \text{ 또는 } b < 2$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

080 | 2023학년도 고3 6월 평가원 확통

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

- ① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$
 ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

081 | 2023학년도 고3 9월 평가원 확통

1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

- ① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

082 | 2021학년도 고3 9월 평가원 가형

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C 라 할 때, $A \subset B \subset C$ 일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$
 ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

083 | 2010학년도 고3 9월 평가원 나형

1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c ($a < b < c$)가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) $a+b+c$ 는 홀수이다.
 (나) $a \times b \times c$ 는 3의 배수이다.

- ① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{17}{42}$
 ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

01 조건부확률

성취 기준 | 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 조건부확률이란 무엇일까?

조건부확률

다음은 100명의 중·고등학생을 대상으로 등교시 대중교통의 이용유무를 조사하여 나타낸 것이다.

구분	대중교통 이용함	대중교통을 이용하지 않음	합계
중학생	14	34	48
고등학생	16	36	52
합계	30	70	100

전체 조사자 대상자 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 학생이 대중교통을 이용할 확률을 구해보자.

표본공간을 S , 고등학생을 택하는 사건을 A , 대중교통을 이용하는 사건을 B 라 하면

전체 조사자 대상자 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 그 학생이 대중교통을 이용할 확률은 $\frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ 이다.

그런데 고등학생 중에서 한 명을 택한다는 조건 아래에서 그 학생이 대중교통을 이용할 확률은

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \text{ 이다.}$$

이때 이 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

일반적으로 표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여 확률이 0이 아닌

사건 A 가 일어났을 때, 사건 B 가 일어날 확률을 사건 A 가 일어났을 때의

사건 B 의 **조건부확률**이라 하고, 기호로 $P(B|A)$ 와 같이 나타낸다. (“ P B 바 A ”와 같이 읽는다.)

표본공간 S 에서 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은

$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 이다. 이때 이 식의 우변의 분자와 분모를 각각 $n(S)$ 로 나누면

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ 이다.}$$

Tip 1 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 는 사건 A 를 새로운 표본공간으로 생각하고 표본공간 A 에서 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률을 의미한다. 반면 $P(A \cap B)$ 는 표본공간 S 에서 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률이다. 즉, 조건부확률은 표본공간이 제한된다는 특징이 있다.

Tip 2 “~일 때(어떤 전제 조건하에), ~일 확률을 구하시오.”와 같은 물음에서 조건부확률이라는 힌트를 얻을 수 있다.

조건부확률 요약

사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (\text{단, } P(A) > 0)$$

■ 예제 1

한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈의 수가 소수일 확률을 구하시오.

|| 풀이 ||

짝수의 눈이 나오는 사건을 A , 소수의 눈이 나오는 사건을 B 라고 하면

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이므로

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

■ 개념 확인문제 1

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나왔을 때, 그 눈의 수가 3의 약수일 확률을 구하시오.

■ 예제 3

어느 고등학교 남학생은 전체 학생의 60%이다. 남학생의 $\frac{1}{3}$ 은 안경을 쓰고, 여학생의 $\frac{1}{4}$ 은 안경을 쓴다.

이 고등학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명이 안경을 쓸 때, 이 학생이 남학생일 확률을 구하시오.

|| 풀이 ||

풀이1) 정석적 풀이

남학생인 사건을 A , 안경을 쓰는 학생인 사건을 B 라 하면 $P(A)=0.6$, $P(A^c)=0.4$

$$P(B|A)=\frac{1}{3}, P(B|A^c)=\frac{1}{4}$$

$$\text{안경을 쓴 학생일 확률은 } P(B)=P(A \cap B)+P(A^c \cap B)=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)=\frac{6}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

풀이2) 실전적 풀이

$$P(\text{남학생} \cap \text{안경}) = \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{10}, P(\text{여학생} \cap \text{안경}) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{남학생} | \text{안경}) = \frac{P(\text{남학생} \cap \text{안경})}{P(\text{남학생} \cap \text{안경}) + P(\text{여학생} \cap \text{안경})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$$

풀이3) 실전적 풀이 (표그리기)

전체 학생을 100명으로 가정하면 남학생은 60명, 여학생은 40명이다.

남학생 60명 중 안경을 쓴 사람은 20명, 여학생 40명 중 안경을 쓴 사람은 10명이다.

이를 바탕으로 표를 그리면 다음과 같다.

구분	남학생	여학생
안경 씀	20	10
안경 쓰지 않음	40	30
합계	60	40

$$P(\text{남학생} | \text{안경}) = \frac{n(\text{남학생} \cap \text{안경})}{n(\text{안경})} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Tip 필자는 풀이3) 실전적 풀이(표그리기)를 선호하는 편이다.

■ 개념 확인문제 3

어느 회사는 두 공장 A , B 에서 같은 제품을 생산하고 있다. 두 공장 A , B 에서 각각 전체 제품의 30%, 70%를 생산하고 있는데 두 공장에서 생산된 제품의 불량률은 각각 20%, 10%라 한다.

이 두 공장에서 생산된 제품 중에서 임의로 고른 한 개가 불량품이었을 때,

이 제품이 B 공장에서 생산되었을 확률을 구하시오.

02 사건의 독립과 종속

성취 기준 | 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

개념 파악하기 (3) 사건의 독립과 종속이란 무엇일까?

독립과 종속

한 개의 주사위를 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 사건을 A , 3 이상의 눈이 나오는 사건을 B 라 할 때, $P(B)$ 와 $P(B|A)$ 를 각각 구해보자.

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \text{이므로 } P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{이고 } A = \{1, 3, 5\}, A \cap B = \{3, 5\} \text{이므로 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \text{이다.}$$

$P(B) = P(B|A)$ 를 만족시키는 두 사건 A, B 는 서로 어떤 관계가 있을까?

두 사건 A, B 에 대하여 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉, $P(B|A) = P(B)$ (또는 $P(A|B) = P(A)$)일 때, 두 사건 A, B 는 서로 **독립**이라 한다.

또 두 사건 A, B 가 서로 독립이 아닐 때, 두 사건 A, B 는 서로 **종속**이라 한다.

$P(A) > 0, P(B) > 0$ 인 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(B|A) = P(B)$ 이므로

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$ 가 성립한다.

역으로 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 이고, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이면

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \text{이므로 두 사건 } A, B \text{는 서로 독립이다.}$$

두 사건이 서로 독립일 조건

두 사건 A, B 에 대하여 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (단, $P(A) > 0, P(B) > 0$)

Tip 1 독립이라는 표현이 나오면 바로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 을 떠올리도록 하자.
 독립이 아니면 종속이므로 종속이라는 표현이 나와도 독립을 떠올리도록 하자.
 $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow$ 두 사건 A, B 가 서로 독립
 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Rightarrow$ 두 사건 A, B 가 서로 종속

Tip 2 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $A, B^c / A^c, B / A^c, B^c$ 도 각각 서로 독립이다.
 $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$
 $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$
 즉, 사건 A, B 가 서로 독립이면 사건 B 는 사건 A 가 일어나거나 일어나지 않은 것에 아무런 영향을 받지 않는다.

개념 파악하기 (4) 독립시행이란 무엇일까?

독립시행의 확률

한 개의 주사위를 던지는 시행을 다섯 번 반복하였더니 1의 눈이 연속으로 다섯 번 나왔다. 여섯째 시행에서 1의 눈이 나올 확률은 무엇일까?

6개의 눈이 나올 가능성이 각각 같은 주사위라면 앞의 주사위를 던지는 시행에서 나온 결과와 상관없이 다음 시행에서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.

주사위나 동전을 여러 번 던지는 시행과 같이 어떤 시행을 반복하는 경우 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉 각 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 **독립시행**이라 한다.

독립시행에서는 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립이므로 독립시행의 확률은 각 사건의 확률을 곱하여 구할 수 있다.

ex 한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률을 구하시오.

한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 각 시행의 결과는 다른 시행의 결과에 아무런 영향을 주지 않는다. 이때 각 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

한 개의 주사위를 3번 던져 3의 배수의 눈이 2번 나오는 경우는 아래 표와 같이 ${}_3C_2$ 가지이고 각 경우의 확률은 모두 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$ 이다.

(3의 배수의 눈이 나오는 경우를 ○, 나오지 않는 경우를 ×)

첫 번째	두 번째	세 번째	확률
○	○	×	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
○	×	○	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
×	○	○	$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

따라서 한 개의 주사위를 3번 던지는 독립시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$ 이다.

Tip 1 ${}_3C_2$ 가 하는 역할은 같은 것이 반복되는 **총 개수**임을 기억하자.

Tip 2 같은 것이 반복되는 총 개수를 구할 때, 같은 것이 있는 순열로 처리해줘도 무방하다. OOX을 일렬로 배열하는 경우의 수 $\frac{3!}{2!}=3$ 이므로 3가지이다.

독립시행의 확률 요약

1회의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 p 일 때, n 회의 독립시행에서 사건 A 가 r 회 일어날 확률은

① ${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ (단, $r=1, 2, 3, \dots, n-1$)

② $r=0$ 일 때 $(1-p)^n$

③ $r=n$ 일 때 p^n

ex 어떤 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$ 일 때, 이 시행을 3회 반복하는 독립시행에서 사건 A 가 2회 일어날 확률을 구하시오.

$${}_3 C_2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}$$

Tip 1

${}_n C_r$ 가 하는 역할은 같은 것이 반복되는 **총 개수**임을 기억하자.

문제에 따라서는 직접 세어야 하는 경우도 있으니 상황을 봐가면서 공식을 써야 한다.

ex

한 개의 주사위를 3번 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률을 구하시오.

앞에서 다룬 위 문제에 “3의 배수의 눈이 연속해서 나오지 않는다.”라는 조건을 추가하면

$\circ \times \circ$ 만 가능하므로 총 개수는 1이 된다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$ 이다.

Tip 2

이항정리 $\{p+(1-p)\}^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ 에서 일반항 ${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ 은

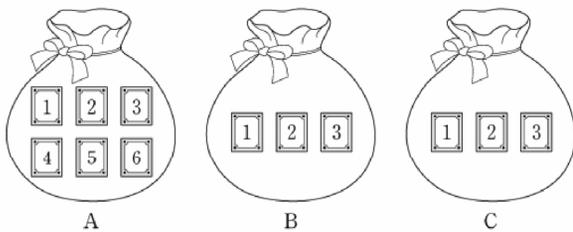
독립시행의 확률과 같다.

094 | 2018학년도 고3 9월 평가원 가형

그림과 같이 주머니 A에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있고 주머니 B와 C에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적힌 3장의 카드가 각각 들어 있다. 같은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서, 병은 주머니 C에서 각자 임의로 1장의 카드를 꺼낸다.

이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률은 k 이다.

$100k$ 의 값을 구하시오. [4점]



095 | 2017학년도 사관학교 가형

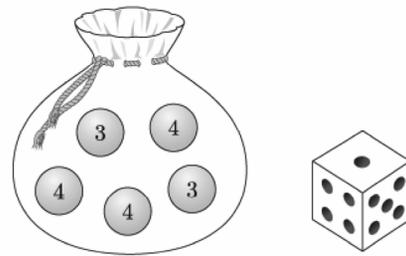
주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

096 | 2021학년도 수능 가형

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 5개의 공에 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고, 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 확률은? [4점]



- ① $\frac{13}{180}$ ② $\frac{41}{540}$ ③ $\frac{43}{540}$
 ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{47}{540}$

Guide step

개념 익히기편

1. 확률분포

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

성취 기준 | 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

개념 파악하기 (3) 이산확률변수의 기댓값과 표준편차는 어떻게 구할까?

이산확률변수의 기댓값

이산확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ 을 이산확률변수 X 의 **기댓값** 또는 평균이라고 하고,

이것을 기호로 $E(X)$ 와 같이 나타낸다.

Tip $E(X)$ 에서 E는 기댓값을 뜻하는 'Expectation'의 첫 글자이다.

이산확률변수의 분산과 표준편차

이산확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

이산확률변수 X 의 기댓값 $E(X)$ 를 m 이라 할 때, $(X-m)^2$ 의 기댓값을 확률변수 X 의 **분산**이라고 하고, 이것을 기호로 $V(X)$ 와 같이 나타낸다.

또 분산 $V(X)$ 의 양의 제곱근 $\sqrt{V(X)}$ 를 확률변수 X 의 **표준편차**라 하고, 이것을 기호로 $\sigma(X)$ 와 같이 나타낸다.

Tip 1 $V(X)$ 에서 V는 분산을 뜻하는 'Variance'의 첫 글자이고 $\sigma(X)$ 에서 σ 는 'Sigma'라고 읽으며, 표준편차를 뜻하는 'standard deviation'의 s에 해당하는 그리스 문자이다.

Tip 2 두 확률변수의 평균이 같다고 해서 그 확률분포까지 같은 것은 아니다. 평균만으로는 확률분포를 충분히 설명할 수 없기 때문에 확률변수가 평균의 주위에 어떻게 분포되어 있는가를 나타내기 위한 척도로서 분산과 표준편차를 사용한다. 분산과 표준편차가 작을수록 확률변수는 평균의 주위에 모여 있다는 것을 의미한다.

$V(X)$ 는 $(X-m)^2$ 의 기댓값이므로 다음과 같이 구한다.

$$V(X) = E((X-m)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \dots + (x_n - m)^2 p_n$$

한편 $V(X)$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 p_i - 2m x_i p_i + m^2 p_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^n x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

Tip $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 은 정말 자주 나오는 공식이니 반드시 기억하도록 하자.

이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차 요약

① 이산확률변수 X 의 기댓값(평균) $E(X)$ 는

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

② 이산확률변수 X 의 기댓값을 m 이라 할 때, X 의 분산 $V(X)$ 는

$$V(X) = E((X-m)^2) = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \dots + (x_n - m)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

③ 이산확률변수 X 의 표준편차 $\sigma(X)$ 는

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

■ 예제 2

서로 다른 3개의 동전을 동시에 던져서 뒷면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X 라 할 때, X 의 기댓값을 구하시오.

|| 풀이 ||

X 의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 X 의 기댓값은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

■ 개념 확인문제 2

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 차를 확률변수 X 라 할 때, X 의 평균을 구하시오.

04 정규분포

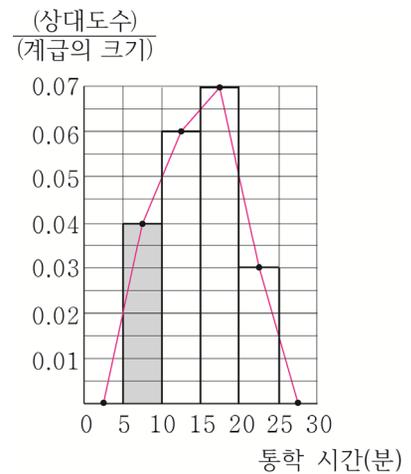
성취 기준 | 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

개념 파악하기 (8) 연속확률변수의 확률분포는 어떻게 나타낼까?

연속확률변수의 확률분포

다음은 어느 고등학교에서 100명의 학생의 통학 시간을 조사하여 $\frac{\text{상대도수}}{\text{계급의 크기}}$ 를 표, 히스토그램, 도수분포다각형으로 나타낸 것이다.

통학 시간(분)	도수	상대도수	$\frac{\text{상대도수}}{\text{계급의 크기}}$
5 이상 ~ 10 미만	20	0.2	0.04
10 이상 ~ 15 미만	30	0.3	0.06
15 이상 ~ 20 미만	35	0.35	0.07
20 이상 ~ 25 미만	15	0.15	0.03
합계	100	1	

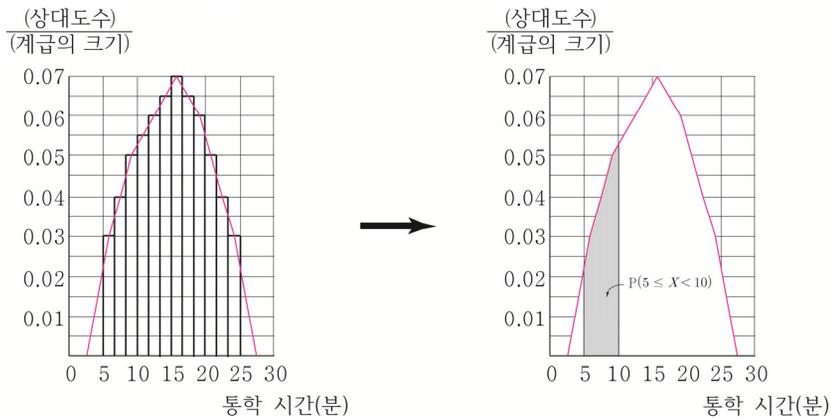


통학 시간을 확률변수 X 라 하면 X 가 가지는 값은 5 이상 25 미만의 실숫값이므로 X 는 연속확률변수이다. 이때 X 가 5 이상 10 미만일 확률은 $P(5 \leq X < 10) = 0.2$ 이다. 한편 위의 히스토그램에서 색칠한 부분은 가로, 세로의 길이가 각각 5, 0.04인 직사각형이므로 그 넓이는 0.2이다. 즉, X 가 5 이상 10 미만일 확률은 위의 히스토그램에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

이때 히스토그램의 각 직사각형의 넓이는 $(\text{직사각형의 넓이}) = (\text{계급의 크기}) \times \frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})} = (\text{상대도수})$ 이다.

즉, 직사각형의 넓이의 합은 상대도수의 합과 같다. 상대도수의 분포표에서 각 계급의 상대도수의 합은 1이므로 도수분포다각형과 가로축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.

만일 조사 대상 수를 늘리고 계급의 크기를 더욱 작게 하여 히스토그램과 도수분포다각형을 그리면 다음 그림과 같이 점점 곡선에 가까워진다.



이때 이 곡선은 항상 x 축보다 위에 있고, 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다. 이와 같은 곡선을 그래프로 가지는 함수 $f(x)$ 를 연속확률변수 X 의 **확률밀도함수**라고 한다.

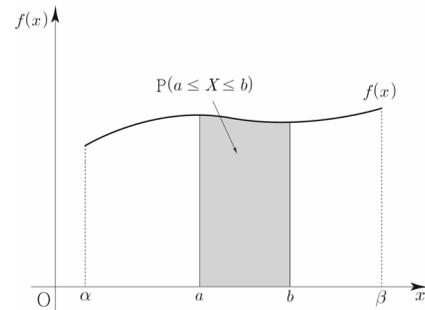
연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x)$ 일 때, X 가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $P(a \leq X \leq b)$ 는 이 곡선과 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$)에 대하여

- ① $f(x) \geq 0$
- ② $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
- ③ 두 상수 a, b ($\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)에 대하여

$P(a \leq X \leq b)$ 는 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이다.



Tip 1 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$)와 $\alpha \leq c \leq \beta$ 인 상수 c 에 대하여 $f(c)$ 와 $P(X=c)$ 은 서로 다르다는 것에 유의해야 한다.
 $f(c)$ 와 $P(X=c)$ 가 서로 같다고 착각하기 쉬우니 조심하자.)
 $f(c)$ 는 단지 확률밀도함수 $f(x)$ 에 대하여 $x=c$ 일 때의 함수값을 의미할 뿐이다.
 반면 연속확률변수에서는 넓이가 곧 확률이 되므로 연속확률변수 X 가 어떤 특정한 값 c 를 취할 확률은 $P(X=c)=0$ 이다.

Tip 2 X 가 연속확률변수일 때, $P(X=c)=0$ (c 는 상수)이므로
 $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$ 이다.

Tip 3 두 상수 a, b ($\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)에 대하여 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 이다.

($f(x) \geq 0$ 이므로 $\int_a^b f(x)dx$ 는 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.)

정규분포

키, 몸무게, 강수량 등과 같이 사회현상이나 자연현상을 관측하여 얻은 자료를 정리하여 나타내면 아래 그림과 같이 좌우 대칭인 종 모양의 곡선인 경우가 많다. 이와 같은 곡선을 그래프로 가지는 함수에 대하여 알아보자.

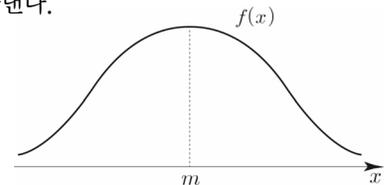
연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \text{는 모든 실수, } m \text{은 상수, } \sigma \text{는 양수, } e \text{는 } 2.718281 \dots \text{인 무리수})$$

일 때, X 의 확률분포를 **정규분포**라 하고, 이것을 기호로 $N(m, \sigma^2)$ 과 같이 나타낸다.

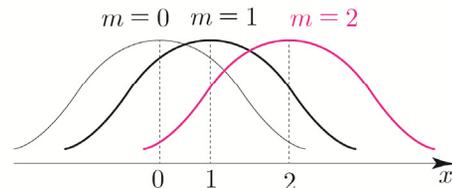
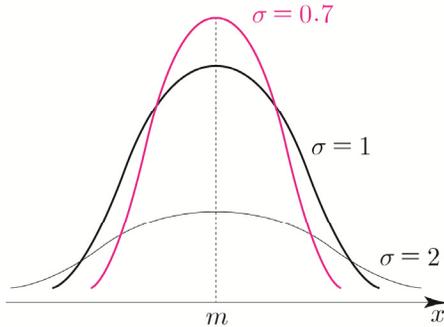
정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점근선이 x 축이면서 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

이때 m 과 $\sigma (\sigma > 0)$ 는 각각 확률변수 X 의 평균과 표준편차임이 알려져 있다.



- Tip 1** $N(m, \sigma^2)$ 에서 N 은 정규분포를 뜻하는 'Normal distribution'의 첫글자이다.
- Tip 2** 정규분포의 확률밀도함수의 그래프를 그릴 때는 세로축을 생략하기도 한다.

- ① m 의 값이 일정하고 σ 의 값이 변할 때
- ② σ 의 값이 일정하고 m 의 값이 변할 때



m 의 값이 일정할 때 ①과 같이 σ 의 값이 커지면 곡선이 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ 의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족하게 된다.

또 σ 의 값이 일정할 때 ②와 같이 m 의 값에 따라 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 의 확률밀도함수의 그래프의 성질

- ① 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고 종 모양의 곡선이다.
- ② 곡선과 x 축 사이의 넓이는 1이다.
- ③ x 축을 점근선으로 하며, $x=m$ 일 때 최댓값을 갖는다.
- ④ m 의 값이 일정할 때, σ 의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고, σ 의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족해진다.
- ⑤ σ 의 값이 일정할 때, m 의 값에 따라 **대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.**

Tip ④에서 σ 의 값이 커질 때, 곡선은 낮아지면서 **양쪽으로 퍼지는** 이유는 곡선과 x 축 사이의 넓이가 1로 일정해야 하기 때문에 높이가 낮아지면서 손실된 넓이를 보상해주기 위해서이다.

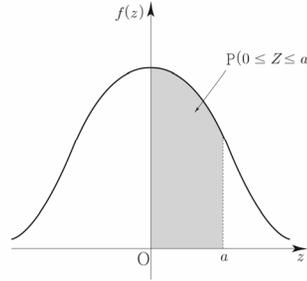
표준정규분포

평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하며, 이것을 기호로 $N(0, 1)$ 과 같이 나타낸다.

확률변수 Z 가 표준정규분포를 따르면 Z 의 확률밀도함수는

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (z \text{는 모든 실수})$$

이때 Z 가 0 이상 a 이하의 값을 가질 확률 $P(0 \leq Z \leq a)$ 는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고 그 값은 표준정규분포표에 주어져 있다.



z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

예를 들어 오른쪽 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이다.

Tip 1 표준정규분포를 따르는 확률변수는 보통 Z 로 나타낸다.

Tip 2 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 의 확률밀도함수 $f(z)$ 의 그래프가 직선 $z=0$ 에 대칭이므로

- ① $P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$
- ② $P(-a \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq a)$ (단, $a \geq 0$)

정규분포와 표준정규분포의 관계

정규분포와 표준정규분포의 관계를 알아보자.

X 가 이산확률변수일 때, 확률변수 $Y = aX + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)에 대하여 $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2V(X)$ 가 성립함을 배웠다.

이와 마찬가지로 X 가 연속확률변수일 때, 확률변수 $Y = aX + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)에 대하여 $E(Y) = aE(X) + b$, $V(Y) = a^2V(X)$ 가 성립한다.

이를 바탕으로 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 이라고 하면

확률변수 Z 의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E(Z) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{m}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$$

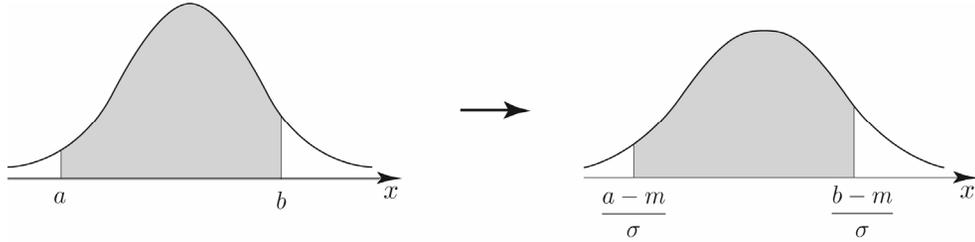
이처럼 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 를 확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 나타내면

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 즉, 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률을

확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 의 확률을 이용하여 구할 수 있다.

따라서 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, X 가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $P(a \leq X \leq b)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$$



정규분포와 표준정규분포의 관계 요약

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때,

① 확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

② $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$

Tip 1 확률변수 X 의 평균이 m 이고 표준편차가 σ 일 때, X 를 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 로 바꾸는 변환을 **표준화**라고 한다.

Tip 2 표준화를 해도 넓이는 변하지 않는다는 것이 point이다. (미적분을 배운 학생은 치환적분이라고 이해하면 된다.)

Tip 3 <정규분포의 확률을 구하는 메커니즘>

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하자.

① X 는 연속확률변수이므로 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ 이다.

다만 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 가 너무 복잡하다. (-)

② X 를 Z 로 변환해도 넓이는 변하지 않으므로 Z 로 변환해준다. $P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$

③ 표준정규분포표를 이용한다.

031



연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{a}{8}x^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

매회의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 $P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{3}\right)$ 로 일정하다. 총 64회의 독립시행에서 사건 A 가 일어나는 횟수를 확률변수 Y 라 할 때, $E(Y^2)$ 의 값을 구하시오.
(단, a 는 상수이다.)

032



연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq x \leq 8$ 이고, X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(4-x) = f(4+x)$$

를 만족시킨다. $P(0 \leq X \leq 3) = 3P(3 \leq X \leq 5)$ 일 때, $P(5 \leq X \leq 8)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
- ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

7 Theme

정규분포와 표준정규분포

033



정규분포 $N(10, 3^2)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여 $P(a \leq X \leq 13) = 0.8185$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

034



확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 를 따를 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

| 보기 |

- ㄱ. $P(X \leq m) = 1$
- ㄴ. $P(X \geq m+a) = P(X \leq m+b)$ 이면 $a+b=0$ 이다.
- ㄷ. 모든 실수 a 에 대하여 $P(X \leq a) + P(X \leq 2m-a) = 1$ 이다.
- ㄹ. $m=3$ 이고 $\sigma=1$ 이면 $\sum_{k=1}^5 P(X \geq k) = 2.5$ 이다.

035



두 확률변수 X, Y 가 정규분포 $N(8, 2^2), N(25, 3^2)$ 을 따르고 $P(6 \leq X \leq 12) = P(a \leq Y \leq 28)$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

02 표본평균의 분포

성취 기준 | 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.

개념 파악하기 (2) 모평균과 표본평균이란 무엇일까?

모평균과 표본평균

모집단의 특성을 나타내는 확률변수의 확률분포를 모집단의 확률분포라 한다. 모집단의 확률분포에서 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각 m , σ^2 , σ 와 같이 나타낸다. 한편 어떤 모집단에서 크기가 n 인 표본 X_1, X_2, \dots, X_n 을 임의추출하였을 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 이것을 기호로 각각 \bar{X} , S^2 , S 와 같이 나타내고 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}$$

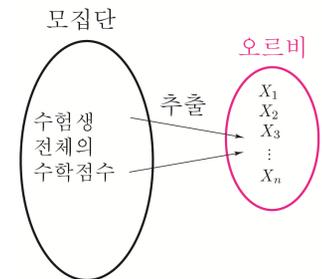
$$S = \sqrt{S^2}$$

예를 들어 수험생 전체의 수학점수의 평균, 분산, 표준편차를 구하기 위해서 오르비가 크기가 n 인 표본을 추출하여 모집단의 특성을 조사하는 상황을 가정해보자. 크기가 n 인 표본 X_1, X_2, \dots, X_n 을 임의추출하였다면

$$\text{표본평균 } \bar{X} (\text{오르비의 평균}) = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$\text{표본분산 } S^2 (\text{오르비의 분산}) = \frac{1}{n-1} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}$$

$$\text{표본표준편차 } S (\text{오르비의 표준편차}) = \sqrt{S^2}$$



Tip 1 표본평균, 표본분산, 표본표준편차는 표본이 새롭게 추출될 때마다 달라진다.

Tip 2 통계에서 가장 중요한 것은 개념학습이다. 특히, 통계적 추정파트에서 중요한 것은 기호간의 구별인데 새로운 기호들이 다수 등장하여 헷갈릴 수 있으니

예를 통해 확실히 기억하고 넘어가도록 하자. (중요★)

m = 모평균 (수험생 전체의 평균), σ = 모표준편차 (수험생 전체의 표준편차),

\bar{X} = 표본평균 (오르비의 평균), S = 표본표준편차 (오르비의 표준편차)

Tip 3 표본분산을 구할 때에는 표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위하여 편차의 제곱의 합을 $n-1$ 로 나눈다. (오차를 줄이기 위함이라고 기억하고 넘어가도록 하자.)

Tip 4 모집단에서 크기가 같은 표본을 임의추출하였을 때, 모집단은 변하지 않으므로 모평균은 변하지 않지만 표본평균 \bar{X} 는 추출한 표본에 따라 다른 값을 가질 수 있으므로 표본평균 \bar{X} 는 확률변수이다.

개념 파악하기

(3) 표본평균의 확률분포는 어떻게 나타낼 수 있을까?

표본평균 \bar{X} 의 평균, 분산, 표준편차

표본평균의 분포를 살펴보고, 표본평균과 모평균 사이의 관계를 알아보자.

2, 4, 6, 8의 수가 각각 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있는 상자에서 임의추출한 한 개의 공에 적힌 수를 X 라 하면 X 의 확률분포, 즉, 모집단의 확률분포는 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 확률변수 X 의 모평균 m , 모분산 σ^2 , 모표준편차 σ 는 각각 다음과 같다.

$$m = E(X) = 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{4} + 8^2 \times \frac{1}{4} - 5^2 = 5$$

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{5}$$

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 추출한 공에 적힌 수를 각각 X_1, X_2 라고 하자.

$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ 의 값을 구하기 위해서 변수가 2개이니 표를 그려서 해결해보자.

$X_1 \backslash X_2$	2	4	6	8
2	2	3	4	5
4	3	4	5	6
6	4	5	6	7
8	5	6	7	8

확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

\bar{X}	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(\bar{X}=\bar{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

이때 표본평균 \bar{X} 의 평균과 분산, 표준편차는 각각 다음과 같다.

$$E(\bar{X}) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{3}{16} + \dots + 8 \times \frac{1}{16} = 5$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 = 2^2 \times \frac{1}{16} + 3^2 \times \frac{2}{16} + \dots + 8^2 \times \frac{1}{16} - 5^2 = \frac{5}{2}$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

표본평균 \bar{X} 의 평균, 분산, 표준편차를 모집단의 모평균, 모분산, 모표준편차와 비교하면 다음과 같다.

$$E(\bar{X}) = m, \quad V(\bar{X}) = \frac{5}{2} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본평균 \bar{X} 의 평균, 분산, 표준편차 정리

모평균이 m , 모표준편차가 σ 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 에 대하여 다음이 성립한다.

$$E(\bar{X})=m, V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}, \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

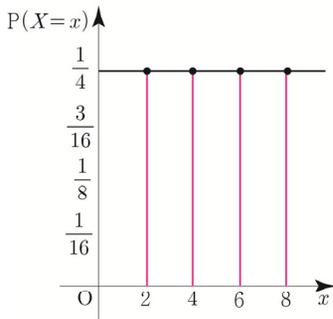
ex 모평균 30, 모분산이 9인 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 의 평균, 분산, 표준편차는 각각 다음과 같다.

$$E(\bar{X})=30, V(\bar{X})=\frac{9}{16}, \sigma(\bar{X})=\frac{3}{4}$$

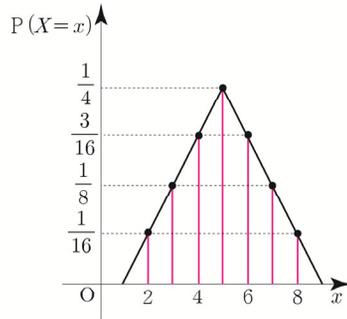
Tip 교육과정상 $E(\bar{X})=m, V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}, \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 공식은 따로 유도하지 않아도 되고 예시를 통해 귀납적으로 받아들이면 된다.

표본평균 \bar{X} 의 확률분포

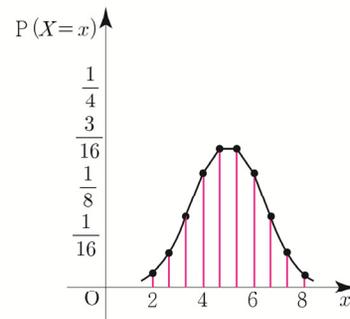
다음 그림과 같이 표본의 크기 n 이 커질수록 표본평균 \bar{X} 의 확률분포는 정규분포에 가까워짐을 알 수 있다.



모집단의 분포



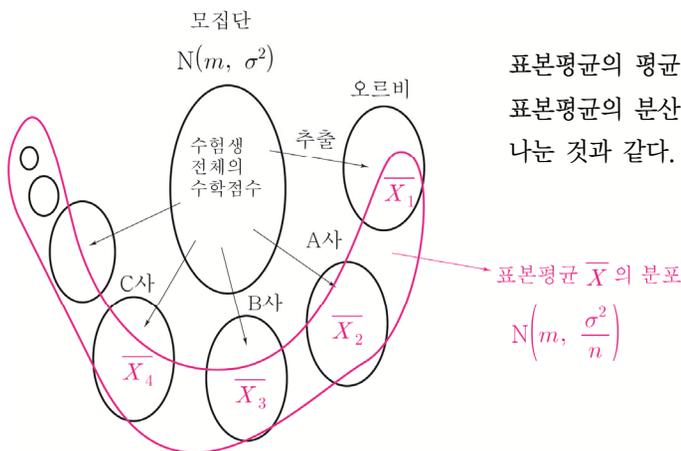
$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ 의 분포



$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ 의 분포

모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 크기가 n 인 표본의 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.

예를 들어 오르비를 포함한 A사, B사, C사, ...의 표본평균을 각각 추출하여 표본평균의 분포를 조사하는 상황을 가정해보자. (오르비의 평균 \bar{X}_1 , A사의 평균 \bar{X}_2 , B사의 평균 \bar{X}_3 , C사의 평균 \bar{X}_4 , ...)



표본평균의 평균 $E(\bar{X})$ 이 모평균 m (수험생 전체의 평균)과 같고 표본평균의 분산 $V(\bar{X})$ 이 모분산 σ^2 (수험생 전체의 분산)을 n 으로 나눈 것과 같다.

표본평균 \bar{X} 의 확률분포 정리

모평균이 m , 모표준편차가 σ 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르면 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.
- ② 표본의 크기 n 이 충분히 크면 모집단의 분포가 정규분포가 아니더라도 표본평균 \bar{X} 는 근사적으로 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다. (일반적으로 $n \geq 30$ 이면 표본의 크기 n 이 충분히 큰 것으로 본다.)

ex 정규분포 $N(10, 3^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 의 평균, 표준편차는 각각 다음과 같다.

$$E(\bar{X}) = 10, \sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

따라서 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(10, \frac{9}{25}\right)$ 를 따른다.

Tip 실전에서는 분산보다는 표준편차를 쓸 일이 더 많기 때문에 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 대신에 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 라고 기억하는 편을 추천한다.

■ 예제 1

모평균이 30, 모표준편차가 6인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 \bar{X} 의 평균과 표준편차를 구하시오.

|| 풀이 ||

$$E(\bar{X}) = m, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ 이므로 } E(\bar{X}) = 30, \sigma(\bar{X}) = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \text{ 이다.}$$

■ 개념 확인문제 1

모평균이 50, 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출할 때,

표본평균 \bar{X} 의 평균과 표준편차를 구하시오.

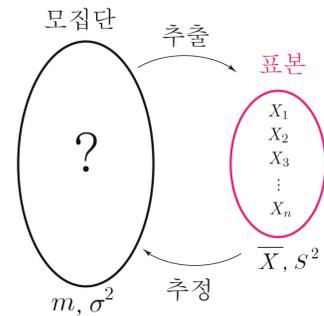
03 모평균의 추정

성취 기준 | 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

개념 파악하기 (4) 모평균은 어떻게 추정할까?

모평균의 추정

표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 값인 모평균, 모표준편차 등을 추측하는 것을 **추정**이라고 한다.
 표본조사를 통해 얻은 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.
 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하면 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따르고, 확률변수 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 은 표본정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.



표준정규분포에서 $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ 이므로 $P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95$ 이다.

이것을 정리하면 다음과 같다. $P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$

따라서 모평균 m 이 $\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 범위에 속해 있을 확률은 0.95이다.

여기서 실제로 얻은 표본평균 \bar{X} 의 값을 \bar{x} 를 대입한 범위

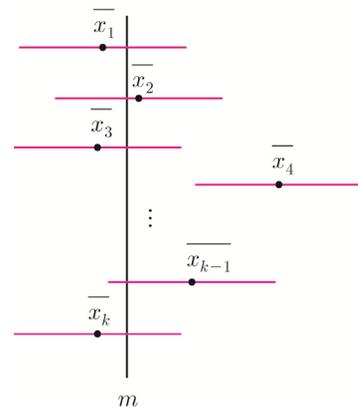
$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m 에 대한 **신뢰도 95%의 신뢰구간**이라고 한다.

모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하면 추출하는

표본에 따라 \bar{x} 가 달라지며, 이에 따라 신뢰구간도 달라진다.

이와 같은 신뢰구간 중에는 오른쪽 그림과 같이 모평균 m 을 포함하는 것과 포함하지 않는 것이 있다. (\bar{x}_4 로 계산한 신뢰구간은 m 을 포함하지 않는다.)



모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간 $\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

는 추출된 표본에 따라 달라지며 이 신뢰구간은 모평균을 포함하거나 포함하지 않거나 둘 중의 하나이다.

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이라는 말은

모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출을 되풀이하여 모평균의 신뢰구간을 여러 번 구할 때,

이들 중에서 95% 정도는 모평균 m 을 포함할 것으로 기대된다는 뜻이다.

마찬가지로 $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$ 이므로 모평균 m 의 신뢰도 99%인 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균의 신뢰구간

모집단의 확률분포가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{x} 라고 하면, 모평균 m 에 대한 신뢰구간은

- ① 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ② 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Tip 1 신뢰도 100%의 신뢰구간을 사용하는 것이 가장 좋지 않을까?
 답은 “아니다”이다. 예를 들어 고등학생의 평균 키에 대한 신뢰구간을 0cm에서 1000cm로 하면 신뢰도는 100%이지만 고등학생들의 키에 대한 유의미한 정보를 주지 못하므로 이는 유용하지 않다.

Tip 2 모평균을 추정할 때, 실제로는 모표준편차 σ 를 모르는 경우가 대부분이다.
 이러한 경우 표본의 크기 n 이 충분히 클 때($n \geq 30$), 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 S 를 사용하여 근사적으로 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다.

모평균의 신뢰구간 (일반형)

신뢰구간을 상수 k 를 도입하여 일반화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

유도 과정에서 “ **k 는 %를 결정하고 %는 k 를 결정한다.**”는 사실을 알 수 있었다.

즉, 문제에서 주어지는 표준정규분포표에 따라 k 값과 %는 달라질 수 있다.

(만약 출제자가 계산의 간소화를 의도하여 $P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.95$ 라고 명시했다면 $k=2$ 가 된다.

즉, 높은 확률로 95%일 때, $k=1.96$ 이겠지만 95%일 때, 무조건 $k=1.96$ 은 아니라는 뜻이다.)

이번에는 실전에서 자주 사용되는 문제풀이 테크닉에 대해 알아보자.

$a = \bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $b = \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 라 하면

신뢰구간의 길이는 $b - a = \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \times k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

또한 a 와 b 를 더하면 $a + b = \bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\bar{x}$ 이므로 표본평균을 쉽게 구할 수 있다.

위 내용을 정리하면 다음과 같다.

- ① 신뢰구간을 일반화하면 $\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이고, 이때 k 는 %를 결정하고 %는 k 를 결정한다.
- ② 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 일 때,
 - i) $b - a = 2 \times k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 신뢰구간의 길이
 - ii) $a + b = 2\bar{x}$

Tip 특히 $a + b = 2\bar{x}$ 는 요즘 트렌드이니 반드시 기억해두자.

019



어느 공장에서 생산되는 마스크의 길이 X 는 평균이 m 이고, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다고 한다.

$P(X \leq k-m) = 0.9772$ 일 때, 이 공장에서 생산된 마스크

중에서 임의추출한 마스크

16개의 길이의 표본평균이

$\frac{k-3}{2}$ 이상일 확률을 오른쪽

표준정규분포표를 이용하여

구한 것은? (k 는 상수이고,

단위의 길이는 cm이다.)

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359
- ④ 0.1587 ⑤ 0.2857

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

020



어느 모집단의 확률변수 X 가 정규분포 $N(55, 5^2)$ 을 따를 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 양의 상수 k 가

$$P(|Z-k| \leq k) = 0.3$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $P(X \leq 55+k) > P(\bar{X} \leq 55+k)$
- ㄴ. $P(|\bar{X}-55| \leq 2k) = 0.6$
- ㄷ. $P(Z \leq -a) = 0.1$ 인 상수 a 에 대하여 $\frac{a}{2} > k$ 이다.
- ㄹ. $P(\bar{X} \geq 55+k) > 0.2$
- ㅁ. $P(55-k \leq \bar{X} \leq b) = 0.6$ 인 상수 b 에 대하여 $2k+55 > b$ 이다.

021



정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 16인

표본을 임의추출하여 구한 표본평균 \bar{X} ,

정규분포 $N(20, (\sigma+2)^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가

25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{Y} 라 하자.

두 확률변수 \bar{X} , \bar{Y} 의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라

할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=30$ 에 대하여 서로 대칭이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

보기

- ㄱ. $m+\sigma = 48$
- ㄴ. $g(m-5) < f(m-5)$
- ㄷ. $P(\bar{X} \geq 50) = P(\bar{Y} \leq 10)$
- ㄹ. $P(20 \leq \bar{X} \leq 30) < P(20 \leq \bar{Y} \leq 30)$
- ㅁ. $P(40 \leq \bar{X} \leq 50) = a$ 이면 $P(|\bar{Y}-20| \geq 15) > 1-2a$ 이다.
- ㅂ. $P(\bar{X} \leq 42) + P(\bar{Y} \geq 18)$ 의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하면 1.6826이다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

확률변수 X 를 확률변수 $(c: \quad)$ 로 변환 방법

확률변수 $(c: \quad)$ 를
 확률변수 X 과 m, σ 로 나타내면
 $(c: \quad) = (\quad)$ 이다.

이항분포와 정규분포의 관계는 다음과 같다.

확률변수 X 가 이항분포 $B(\quad, \quad)$ 를 따를 때,
 (\quad) 이 충분히 크면 X 는 근사적으로 정규분포
 $N(\quad, \quad)$ 를 따른다.

n 이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $(\quad) \geq (\quad)$
 일 때를 뜻한다.

Chapter 5) 모집단과 표본

통계조사에서 조사하고자 하는 대상 전체를 $(a: \quad)$ 이라
 하고, $(a: \quad)$ 전체를 조사하는 것을 $(b: \quad)$ 라 한다.

통계 조사를 하기 위해 뽑은 모집단의 일부분을 $(c: \quad)$
 이라고 하고, 표본에 포함된 대상의 개수를 (\quad) ,
 모집단에서 표본을 뽑는 것을 $(d: \quad)$ 이라고 한다.
 또한 조사하려는 모집단에서 $(c: \quad)$ 을 $(d: \quad)$ 하여
 그 자료의 특성을 조사하는 것을 (\quad) 라 한다.

모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는
 방법을 (\quad) 추출이라 한다. 또 한 개의 자료를 뽑은 후
 되돌려 놓고 다시 뽑는 것을 (\quad) 이라 하고
 되돌려 놓지 않고 뽑는 것을 (\quad) 이라 한다.

Chapter 6) 표본평균과 분포

모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를
 X 라 할 때, X 의 평균, 분산, 표준편차를 각각
 모평균, 모분산, 모표준편차라 한다.
 이것을 기호로 나타내면

모평균은 (\quad)
 모분산은 (\quad)

모표준편차는 (\quad)
 이다.

모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본을
 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 이라 할 때,
 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각
 $(d: \quad), (e: \quad), (f: \quad)$ 라 한다.

이때 $(d: \quad), (f: \quad)$ 는
 오르비의 평균과 표준편차일까?
 수험생 전체의 평균과 표준편차일까?
 답은 (\quad) 의 평균과 표준편차이다.

이것을 기호로 나타내면

$(d: \quad)$ 는 $(\neg: \quad)$
 $(e: \quad)$ 는 $(\sqcup: \quad)$
 $(f: \quad)$ 는 $(\sqsubset: \quad)$

이고 다음과 같이 정의한다.

① $(\neg: \quad) = (\quad)$
 ② $(\sqcup: \quad)$

$$= \frac{1}{n-1} \{ (X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2 \}$$

③ $(\sqsubset: \quad) = (\quad)$
 $(d: \quad)$ 의 평균은 기호로 나타내면 $(g: \quad)$
 $(d: \quad)$ 의 분산은 기호로 나타내면 $(h: \quad)$
 $(d: \quad)$ 의 표준편차는 기호로 나타내면
 $(i: \quad)$ 이다.

모평균이 m , 모분산이 σ^2 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을
 임의추출할 때, $(d: \quad)$ $(\neg: \quad)$ 에 대하여
 다음이 성립한다.

$(g: \quad) = (\quad)$
 $(h: \quad) = (\quad)$
 $(i: \quad) = (\quad)$

077

어느 블로그의 하루 방문자 수는 모평균이 295 이고, 모표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 블로그의 하루 방문자 수 가운데 25 일을 임의추출하여 모평균의 값을 신뢰도 $a\%$ 로 추정한 신뢰구간이 $[\bar{x}-6, \bar{x}+6]$ 이고, 이 블로그의 하루 방문자 수 가운데 9 일을 임의추출하여 조사할 때, 9 일 동안 총 방문자 수가 2700 명 이상일 확률이 0.1587 일 때, a 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 65.87 ② 68.26 ③ 86.64
 ④ 95.44 ⑤ 98.76

078

상자 속에 1의 숫자가 적혀 있는 카드가 n 개, 2의 숫자가 적혀 있는 카드가 $n+5$ 개 들어 있다. 이 상자에서 임의로 1개의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 3번 반복하여 얻은 세 수들의 평균을 \bar{X} 라 하자. $P(\bar{X} > 1) = \frac{26}{27}$ 일 때, $\frac{E(4\bar{X})}{P(\bar{X} = \frac{5}{3})}$ 의 값을 구하시오.

079

정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르는 확률변수 X 와 이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(X \leq -11) = P(X \geq 13) = 0.0013$
 (나) $P(\bar{X} \geq -2) = 1.9759 - P(X \geq -7)$

$P(\bar{X}^2 - 7\bar{X} + 12 \leq 0)$ 의 값은?

- ① 0.0215 ② 0.0228 ③ 0.0668
 ④ 0.1525 ⑤ 0.1587

080

정규분포 $N(m, 3^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본의 표본평균을 \bar{X} 라 할 때, 함수 $G(m)$ 은

$$G(m) = P\left(\bar{X} \leq \frac{6}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. $1.6687 \leq G(0) + G(0.5) \leq 1.9104$ 을 만족시키는

자연수 n 의 개수를 오른쪽

표준정규분포를 이용하여

구하시오.

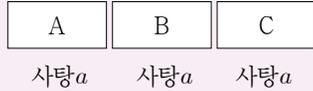
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

■ 개념 확인문제 5

서로 다른 종류의 사탕에게 물어본다.
3명 중 어디에 갈래? 3가지
 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

답 243

Tip 만약 “세 명 A, B, C에게 어디 갈래?”라고 물어본다면 5^3 가지 중에 다음과 같은 경우가 가능하다.



즉, 사탕 a 를 세 명 모두 받는 경우이다. (물뽕)
이러한 상황은 불가능하므로 5^3 이 될 수 없다.

■ 개념 확인문제 6

- (1) $\frac{6!}{2!3!} = 60$
- (2) 홀수가 적혀있는 카드는 순서가 정해져 있으므로 똑같은 문자 a 라 두고
첫 번째 a 는 1, 두 번째 a 는 3, 세 번째 a 는 5로 바꾸면 된다.
따라서 $a a a 2 4$ 를 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{3!} = 20$ 이다.

답 (1) 60 (2) 20

■ 개념 확인문제 7

- (1) $\frac{8!}{4!4!} = 70$
- (2) A 지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 $\frac{4!}{3!} = 4$
C 지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 $\frac{4!}{3!} = 4$
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$ 이다.

답 (1) 70 (2) 16

■ 개념 확인문제 8

$${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3!} = 165$$

답 165

■ 개념 확인문제 9

- (1) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x + y + z = 4$
 ${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$
- (2) $x \geq -1, y \geq -1, z \geq -1$
 $x = x' - 1, y = y' - 1, z = z' - 1$ 라 하면
 $x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$
 $x' - 1 + y' - 1 + z' - 1 = 4 \Rightarrow x' + y' + z' = 7$
 ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2!} = 36$

답 (1) 15 (2) 36

■ 개념 확인문제 10

세 학생이 받는 사탕 개수를 각각 x, y, z 라 하면 $x + y + z = 6$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 구조가 같다.

$$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1 \text{라 하면}$$

$$x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$$

$$x + y + z = 6$$

$$x' + 1 + y' + 1 + z' + 1 = 6 \Rightarrow x' + y' + z' = 3$$

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

답 10

■ 개념 확인문제 11

- (1) $(a+b+c)^6 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) \times (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$
이므로 $(a+b+c)^6$ 의 전개식의 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 항의 개수는

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2!} = 28$$

$$(2) (a+b)^3(x+y+z)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(x+y+z) \\ \times (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

이므로 $(a+b)^3(x+y+z)^4$ 의 전개식의 항의 개수는
(2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는
중복조합의 수) \times (3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을
허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수)와 같다.

따라서 구하는 항의 개수는

$${}_2H_3 \times {}_3H_4 = {}_{2+3-1}C_3 \times {}_{3+4-1}C_4 \\ = {}_4C_3 \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$$

답 (1) 28 (2) 60

■ 개념 확인문제 12

(1) 서로 **다른** 사탕 5개, 서로 **같은** 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로
각 그릇에 담는 사탕의 개수에 따라 case분류하면

① 각 그릇에 담는 사탕의 개수 2, 2, 1

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

② 각 그릇에 담는 사탕의 개수 3, 1, 1

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 25이다.

(2) 서로 **다른** 사탕 5개, 서로 **다른** 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로
각 그릇에 담는 사탕의 개수에 따라 case분류하면

① 각 그릇에 담는 사탕의 개수 2, 2, 1

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

분배 3! (어떤 그릇에 분배할 것인가)

$$15 \times 3! = 90$$

② 각 그릇에 담는 사탕의 개수 3, 1, 1

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

분배 3! (어떤 그릇에 분배할 것인가)

$$10 \times 3! = 60$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 150이다.

(3) 서로 **다른** 사탕 5개, 서로 **다른** 그릇 3개
사탕을 담지 못하는 그릇이 생길 수 있으므로
 $3^5 = 243$

Tip 서로 다른 사탕을 서로 다른 그릇에
넣고 몰빵 가능하므로 중복순열이다.

(4) 서로 **같은** 사탕 8개, 서로 **다른** 그릇 3개
사탕을 담지 못하는 그릇이 생길 수 있으므로

서로 다른 세 그릇에 담는 사탕의 개수를
각각 x, y, z 라 하면 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
 $x + y + z = 8$

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2!} = 45$$

(5) 서로 **같은** 사탕 8개, 서로 **다른** 그릇 3개
하나의 그릇에는 적어도 하나의 사탕을 담아야하므로

서로 다른 세 그릇에 담는 사탕의 개수를
각각 x, y, z 라 하면 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$
 $x + y + z = 8$

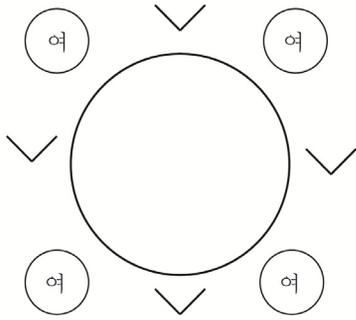
$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1$ 라 하면
 $x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$

$$x' + 1 + y' + 1 + z' + 1 = 8 \Rightarrow x' + y' + z' = 5$$

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2!} = 21$$

답 (1) 25 (2) 150 (3) 243 (4) 45 (5) 21

003



여자 원순열 배열 $(4-1)! = 3!$
 ${}_4C_3$ (V에서 남자 앉을 자리 3개 선택) $\times 3!$ (자리 배열)
 $3! \times {}_4C_3 \times 3! = 6 \times 4 \times 6 = 144$

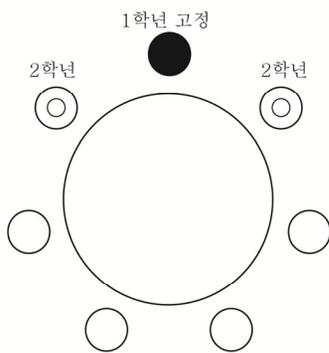
답 144

004

1학년 학생 1명, 2학년 학생 4명, 3학년 학생 2명

1학년 학생의 옆에 적어도 한 명의 3학년 학생이 앉는 경우의 수는 전체 원순열에서 1학년 학생의 옆에 모두 2학년 학생이 앉는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

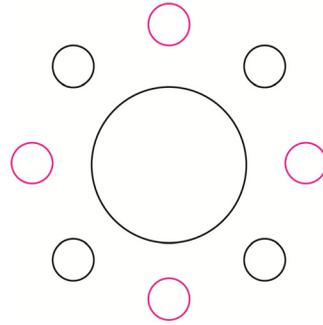
전체 원순열 $6! = 720$
 1학년 학생의 옆에 모두 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times 2!$ (2학년 자리 선택 배열) $\times 4!$ (나머지 배열)
 $= 288$



따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $720 - 288 = 432$ 이다.

답 432

005



$3!$ (남자 원순열 배열) $\times 4!$ (여자 배열) $= 6 \times 24 = 144$

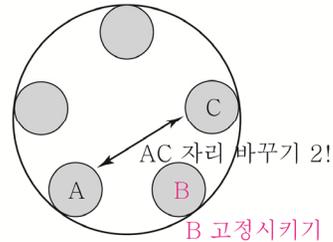
답 144

006

김치=A, 콩나물무침=B, 가지볶음=C

서로 다른 7개의 반찬 A, B, C, D, E, F, G
 D, E, F, G 중 2개 선택하면 ${}_4C_2$

선택된 5개의 반찬을 A, B, C, D, E라 하자.



1 (B 고정시키기) $\times 2!$ (AC 자리 바꾸기)
 $\times 2!$ (DE 자리 바꾸기)

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times 1 \times 2! \times 2! = 6 \times 4 = 24$ 이다.

답 24

007

같은 부서의 대표 2명씩 한 사람으로 보고 5명을 배열하는 원순열 $(5-1)! = 4! = 24$

각 대표 2명 자리 바꾸기 $2^5 = 32$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $24 \times 32 = 768$ 이다.

답 768

각각 $2^5 - 2$ (몰빵제거)이므로 총 $3(2^5 - 2) = 90$ 가지

③ 지역의 개수가 3

지역 {1, 2, 4} 가 나오려면 모두 선택되어야 하니까 분할을 사용하면

$$(1) 3, 1, 1 \Rightarrow {}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! \text{ (분배)} = 60$$

$$(2) 2, 2, 1 \Rightarrow {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! \text{ (분배)} = 90$$

$$\therefore 3 + 90 + 150 = 243$$

051

(가) 조건에 의해 $f(4)$ 는 3의 배수

(나) 조건은 앞서 배운 것처럼 중복조합으로 처리하면 된다.

(중복허용하여 뽑기만 하면 자동배열)

① $f(4) = 3$

(나) 조건에 의해서

$$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 3 \leq f(5) \leq f(6) \leq 6$$

$$\therefore {}_3H_3 \times {}_4H_2 = 10 \times 10 = 100$$

② $f(4) = 6$

(나) 조건에 의해서

$$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 6 = f(5) = f(6)$$

$$\therefore {}_6H_3 \times 1 = 56$$

따라서 모든 함수 f 의 개수는 $100 + 56 = 156$ 이다.

답 156

052

(가) 조건에 의해서 지역인 원소 4개 선택 ${}_6C_4 = 15$ 가지 지역 1, 2, 3, 4가 선택됐다고 가정하자.

(나) 조건을 만족시키는 a 고르기 ${}_4C_3 = 4$ 가지

(지역 1, 2, 3, 4 중 $f(a) = a$ 인 것 고르기)

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 이라 가정하자.

이때 남은 정의역 4, 5, 6 만 지역으로 매칭시켜주면 된다.

① 정의역 4가 가야 할 곳은 지역 1, 2, 3 중 하나이므로 3가지이다. ($\because f(4) = 4$ 이면 (나) 조건에 모순)

Tip ①번은 4가지로 잘못 판단하기 딱 좋은 case이므로 유의하자. 실수하는 point!

② 정의역 5, 6이 가야 할 곳은 지역 1, 2, 3, 4 중

하나이므로 $4^2 = 16$ 가지이다.

이때 지역 4가 선택되지 않는 경우가 포함되어 있으므로

이 경우를 빼줘야 한다.

즉, 정의역 5, 6이 1, 2, 3 중에 한 곳을 가는

경우의 수 $3^2 = 9$ 을 빼주면

$$\therefore 16 - 9 = 7$$

Tip 이렇게 구할 수도 있지만 직접 세도 된다.

i) 정의역 5만 지역 4로 매칭

\Rightarrow 정의역 6이 가야 할 곳은 지역 1, 2, 3 중 하나이므로 3가지이다.

ii) 정의역 6만 지역 4로 매칭

\Rightarrow 정의역 5이 가야 할 곳은 지역 1, 2, 3 중 하나이므로 3가지이다.

iii) 정의역 5, 6 둘다 지역 4로 매칭

\Rightarrow 1가지

$$\therefore 3 + 3 + 1 = 7$$

$k = {}_6C_4 \times {}_4C_3 \times 3 \times (4^2 - 3^2) = 15 \times 4 \times 3 \times 7 = 1260$ 이므로

$$\frac{k}{10} = 126 \text{이다.}$$

답 126

053

지역의 모든 원소의 합이 8인 경우는 다음과 같다.

원소의 개수가 2개 (지역이 3, 5)

원소의 개수가 3개 (지역이 1, 2, 5)

① 원소의 개수가 2개 (지역이 3, 5)

정의역 1, 2, 3, 5에게 물어본다.

지역 3, 5 중 어디갈래?

각각 2가지 $\Rightarrow 2^4 = 16$ 가지

이때 3로 몰빵 or 5로 몰빵하는 경우 2가지를 빼줘야 한다.

$$\therefore 16 - 2 = 14$$

114

서로 다른 상자 4개를 각각 A, B, C, D라 하자.

넣은 공의 개수가 1인 상자의 개수로 case분류하면

① 1 3 0 0

서로 다른 4개의 공을 1개, 3개로 분할 ${}_4C_1 \times {}_3C_3$

1, 3, 0, 0을 A, B, C, D에 매칭시키기 $\frac{4!}{2!}$

$\therefore 4 \times 12 = 48$

② 1 1 2 0

서로 다른 4개의 공을 1개, 1개, 2개로 분할

${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6$

1, 1', 2, 0을 A, B, C, D에 매칭시키기 $4! = 24$

(서로 다른 4개의 공을 1개, 1개, 2개로 나누는 것뿐이므로

1, 1은 서로 다르다. 즉, 1, 1', 2, 0으로 봐야 한다.)

$\therefore 6 \times 24 = 144$

③ 1 1 1 1

1, 1', 1'', 1'''을 A, B, C, D에 매칭시키기 $4! = 24$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $48 + 144 + 24 = 216$ 이다.

답 ④

115

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 치역의 원소 3개 선택 ${}_7C_3 = 35$

1, 2, 3이 선택되었다고 가정하자.

함숫값이 1인 정의역의 원소의 개수를 A

함숫값이 2인 정의역의 원소의 개수를 B

함숫값이 3인 정의역의 원소의 개수를 C

예를 들어 (A, B, C) = (1, 1, 5) 라고 하면

(나) 조건에 의해서 함숫값이 정해진다.

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6) \leq f(7)$
 $\begin{array}{ccccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$

(뽑기만 하면 자동배열!)

$A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1$

$A + B + C = 7$

$A = A' + 1, B = B' + 1, C = C' + 1$

$A' + B' + C' = 4 \Rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

따라서 함수의 개수는 $35 \times 15 = 525$ 이다.

답 525

116

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, Z ($X < Y < Z$) 라 하자.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a

X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b

Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c

Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하자.

$\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} X \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} Y \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} Z \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array}$

$a \geq 0, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 0$

(어느 두 번호도 연속되지 않아야 하므로 $b \geq 1, c \geq 1$)

$a + b + c + d = 5$

$b = b' + 1, c = c' + 1$

$a \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0, d \geq 0$

$a + b' + c' + d = 3 \Rightarrow {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

세 명의 학생과 세 레인 X, Y, Z 매칭시키기 $3! = 6$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $20 \times 6 = 120$ 이다.

답 120

Tip <그뎨 그랬지>

116번은 2019년 고3 7월 교육청 27번 문항이었는데 그 당시 오답률 TOP4를 기록하였고 정답률이 무려 43% 였다. 대부분 답을 20 이라고 써서 틀린 학생이 많았는데 이는 마지막에 3! 를 곱해주지 않는 실수를 했기 때문이다.

처음에는 분명히 고려해야 한다는 생각이 들었다가 문제를 풀면서 까먹는 경우도 종종 발생하곤 한다.

따라서 처음부터 3! 을 큼지막하게 적어놓고 시작하는 것도 실수를 줄이는 하나의 방법이다.

나머지의 합이 3의 배수이면 된다.

Tip <배수 판별법>

- ① 2의 배수 : 끝자리 0, 2, 4, 6, 8
- ② 3의 배수 : 각자리 숫자의 합이 3의 배수
- ③ 4의 배수 : 뒤 끝 두 자리가 4의 배수
- ④ 5의 배수 : 끝자리 0, 5

<3의 배수 증명>

각 자리수를 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ 라 하면

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

$$= 10^n \times a_n + \dots + 10^2 \times a_2 + 10 \times a_1 + a_0$$

$$10^1 = 9 + 1$$

$$10^2 = 99 + 1$$

$$10^3 = 999 + 1$$

$$\vdots$$

이므로

$$(9 \dots 99 + 1) \times a_n + \dots$$

$$+ (99 + 1) \times a_2 + (9 + 1) \times a_1 + a_0$$

$$3(3 \dots 33a_n + \dots + 33a_2 + 3a_1)$$

$$+ a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

따라서 3의 배수하려면 각 자리 숫자의 합이 3의 배수이면 된다.
(3의 배수이다 = 3으로 묶어서 나타낼 수 있다.)

<4의 배수 증명>

각 자리수를 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ 라 하면

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

$$= 10^n \times a_n + \dots + 10^2 \times a_2 + 10 \times a_1 + a_0$$

$10^n (n \geq 2)$ 은 4의 배수이므로
 $4(25 \times 10^{n-2} \times a_n + \dots + 25 \times a_2) + 10 \times a_1 + a_0$
 따라서 4의 배수하려면 $10 \times a_1 + a_0$ 만 4의 배수이면 된다.

- ① 나머지 0, 0, 0
나머지 0 \Rightarrow 3 뿐이니 1가지
- ② 나머지 1, 1, 1
나머지 1 \Rightarrow 1, 4 각 2가지씩이니까

$$\therefore 2 \times 2 \times 2 = 8$$

- ③ 나머지 2, 1, 0
나머지 0 \Rightarrow 3
나머지 1 \Rightarrow 1, 4
나머지 2 \Rightarrow 2, 5

$$\therefore 2 \times 2 \times 1 \times 3! (\text{배열}) = 24$$

- ④ 나머지 2, 2, 2
나머지 2 \Rightarrow 2, 5 각 2가지씩이니까 $2 \times 2 \times 2 = 8$

따라서 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수는
 $1 + 8 + 24 + 8 = 41$ 이다.

답 41

Tip ② 1, 1, 1에서 중복순열로 계산하지 않고 case분류하면 계산량이 많아진다.
 서로 다른 캔디들을 서로 다른 그릇에 담고 한 그릇에 몰빵가능하면 중복순열이다.

중복순열에 관한 문제는 이 문제가 중복순열을 묻는 문제인지 판단하는 것이 가장 어렵다.

133

01의 위치에 따라 case분류하면

- ① 01 _ _ _ _
오류는 한번 뿐이니까 0, 1의 배열은 무조건 1 \rightarrow 0 순서이다. 배열확정!
1의 개수를 x , 0의 개수를 y 라 하면 $x + y = 4$
 ${}_2H_4 = 5$ 가지

- ② _ _ _ _ 01
①와 동일한 구조이므로 ${}_2H_4 = 5$ 가지

- ③ _ 01 _ _ _
첫 번째에 올 숫자 선택 2가지 \times ${}_2H_3 = 8$ 가지

- ④ _ _ _ 01 _
③와 동일한 구조니까 마찬가지로 8가지

- ⑤ _ _ 01 _ _
 ${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$ 가지

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & \cup & \cup & \cup \\ & a & b & c \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a \\ x_3 &= x_1 + a + b \\ x_4 &= x_1 + a + b + c \end{aligned}$$

이므로 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는
순서쌍 (x_1, a, b, c) 의 개수와 같다.

(나) 조건에 의해서 $x_1 + a + b + c \leq 12$
 $x_1 \geq 0, a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$

Training-1step 047번에서 배운 “쓰레기통 처리법”을
사용해보자.

$$x_1 + a + b + c + d = 12$$

$$\begin{aligned} a &= a' + 2, b = b' + 2, c = c' + 2 \\ x_1 \geq 0, a' \geq 0, b' \geq 0, c' \geq 0, d \geq 0 \\ x_1 + a' + b' + c' + d = 6 &\Rightarrow {}_5H_6 = {}_{10}C_4 = 210 \end{aligned}$$

따라서 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는 210이다.

답 ①

Tip EBS연계문항으로 출제되어 나름 까다로운
준킬러 문제였다.

(가) 조건에서 ' $x_{n-1} - x_n$ '에 집중했다면

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & \cup & \cup & \cup \\ & a & b & c \end{matrix}$$

'정수들의 차이'가 문제를 풀어나가는
중요한 실마리라는 것을 느낄 수 있었다.

138

검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루
검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜을 선택하는
개수를 각각 a, b, c 라 하자.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 5 \\ a \text{의 값에 따라 case분류하면} \end{aligned}$$

① $a = 0$
두 명의 학생이 받는 파란색 볼펜의 개수를 각각 A, B
두 명의 학생이 받는 빨간색 볼펜의 개수를 각각 X, Y

b	c	경우의 수
1	4	$A+B=1, X+Y=4 \Rightarrow {}_2H_1 \times {}_2H_4 = 10$
2	3	$A+B=2, X+Y=3 \Rightarrow {}_2H_2 \times {}_2H_3 = 12$
3	2	$A+B=3, X+Y=2 \Rightarrow {}_2H_3 \times {}_2H_2 = 12$
4	1	$A+B=4, X+Y=1 \Rightarrow {}_2H_4 \times {}_2H_1 = 10$

$$\therefore 10 + 12 + 12 + 10 = 44$$

② $a = 1$

두 명의 학생 중 검은색 볼펜 누가 가질래? 2가지

두 명의 학생이 받는 파란색 볼펜의 개수를 각각 A, B

두 명의 학생이 받는 빨간색 볼펜의 개수를 각각 X, Y

b	c	경우의 수
1	3	$A+B=1, X+Y=3 \Rightarrow {}_2H_1 \times {}_2H_3 = 8$
2	2	$A+B=2, X+Y=2 \Rightarrow {}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$
3	1	$A+B=3, X+Y=1 \Rightarrow {}_2H_3 \times {}_2H_1 = 8$
4	0	$A+B=4, X+Y=0 \Rightarrow {}_2H_4 \times {}_2H_0 = 5$
0	4	$A+B=0, X+Y=4 \Rightarrow {}_2H_0 \times {}_2H_4 = 5$

$$\therefore 2(8 + 9 + 8 + 5 + 5) = 70$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $44 + 70 = 114$ 이다.

답 114

139

흰 공 2개 ○ ○

빨간 공 3개 ● ● ●

검은 공 3개 ● ● ●

흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개
이상 받는다.

흰 공에 따라 case분류하면

① ○ ○ ×

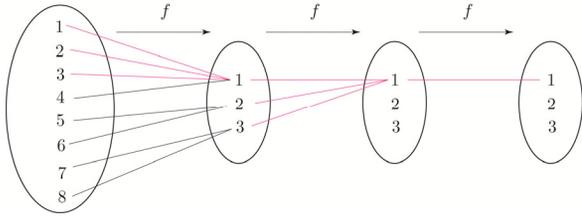
세 학생 A, B, C 중 흰 공 받을 학생 선택 ${}_3C_2 = 3$ 가지
A, B가 흰 공을 받는다고 가정하자.

흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 적어도 1개는
가져야 한다.

A B C

○ ○

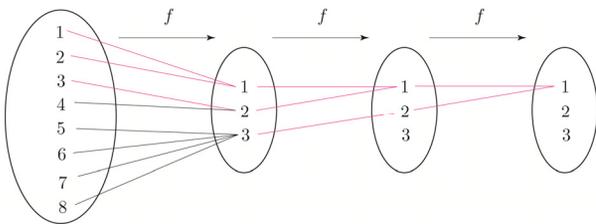
● ●



위 그림과 같이 정의역 {4, 5, 6, 7, 8}에 대하여 함수 f 의 치역이 {1, 2, 3}이어도 (가), (나) 조건을 만족시키므로 $1 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6) \leq f(7) \leq f(8) \leq 3$ 가 되도록 하는 함수의 개수는 ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = 21$

(물론 정의역 {4, 5, 6, 7, 8}에 대하여 함수 f 의 치역이 {1} or {2} or {3} or {1, 2} or {2, 3} or {1, 3}이어도 조건을 만족시킨다.)

② $f(1) = f(2) = 1, f(3) = 2$



위 그림과 같이 정의역 {4, 5, 6, 7, 8}에 대하여 함수 f 의 치역이 {2, 3}이어도 (가), (나) 조건을 만족시키므로 $2 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6) \leq f(7) \leq f(8) \leq 3$ 가 되도록 하는 함수의 개수는 ${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_1 = 6$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $21 + 6 = 27$ 이다.

답 ②

145

집합 A 의 원소의 개수에 따라 case분류하면

① $n(A) = 1$ 인 경우
(다) 조건에 모순이다.

② $n(A) = 2$ 인 경우
1, 2, 3, 4, 5 중에서 치역 선택 ${}_5C_2$
치역이 1, 2라고 하자.

$n(B) = 2$ 이라면

$f(1) = 1, f(2) = 2$ or $f(1) = 2$ or $f(2) = 1$
이 가능한데 (다) 조건을 만족하려면
 $f(1) = 2, f(2) = 1$ 이어야 한다.

정의역의 원소 3, 4, 5에게 물어본다.
치역 1, 2 중 어디 갈래? $\Rightarrow 2^3$

$\therefore {}_5C_2 \times 8 = 80$

③ $n(A) = 3$
1, 2, 3, 4, 5 중에서 치역 선택 ${}_5C_3$
치역이 1, 2, 3라고 하자.

$n(B) = 3$ 이고 (다) 조건을 만족하려면
 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$
or $f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2$
이다.

정의역의 원소 4, 5에게 물어본다.
치역 1, 2, 3 중 어디 갈래? $\Rightarrow 3^2$

$\therefore {}_5C_3 \times 2 \times 3^2 = 180$

따라서 함수 f 의 개수는 $80 + 180 = 260$ 이다.

답 260

146

(가) 조건에 의해서
 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$
 $\leq f(6) \leq f(7) \leq f(8) \leq f(9) \leq f(10)$

(나) 조건에 의해서
 $f(1) = 1, f(2) \leq 2, f(3) \leq 3, f(4) \leq 4, f(5) \leq 5$
 $f(6) \geq 6, f(7) \geq 7, f(8) \geq 8, f(9) \geq 9, f(10) = 10$

$f(5)$ 의 값에 따라 case분류하면

① $f(5) = 5$ 인 경우
(다) 조건에 의해서 $f(6) = 11$ 이므로 (나) 조건에 모순이다.

② $f(5) = 4$ 인 경우
(다) 조건에 의해서 $f(6) = 10$ 이다.

(다) 조건을 고려하여 나누어주면 된다.

C, D는 이미 흰색 모자를 한 개씩 받은 상태에서
A, B, C, D에게 나누어주는 흰색 모자의 개수를
각각 a, b, c, d 라 하자.

$$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$$

$$a + b + c + d = 4$$

(다) 조건을 만족시키려면 $b = 0$ 이어야 하므로

$$a + c + d = 4 \Rightarrow {}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$$

$$\therefore 3 \times 15 = 45$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = (72 + 84) + 45 = 156 + 45 = 201 \text{이다.}$$

답 201

Tip 개인적으로 2021학년도 수능 가형에서
가장 어려웠던 문제라고 생각한다.
경우의 수 특성상 한 개라도 빼먹으면
오답으로 이어지고 case분류가 상당히
복잡했기 때문에 실제 수능현장에서의
체감난이도는 아주 높았을 것이다.

Q. 수능에서 만약 이런 문제를 만났을 때,
우리가 취해야 할 바람직한 태도는? [4점]

- ① 일단 넘기고 추후에 시간이 남으면 도전한다.
- ② 이거 못 풀면 수능 망하는데ㅠㅠ
- ③ 이 문제 풀 때까지
절대 다음 문제로 넘어갈 순 없어!!!
- ④ ‘엄마.... 보고싶어...’

답 ①

074

표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = {}_{15}C_2 \times 2!$$

(공집합이 아닌 모든 부분집합 $2^4 - 1 = 15$ 개 중 2개 선택 후 배열)

$n(A) \times n(B) = 2 \times n(A \cap B)$ 가 성립하는 사건을 X

$2 \times n(A \cap B)$ 는 짝수이므로 가능한 순서쌍 $(n(A), n(B))$ 은 $(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$ 이다.

① $(1, 2)$ 이면 $n(A \cap B) = 1$ 이므로 가능하다.

② $(1, 4)$ 이면 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 모순

③ $(2, 2)$ 이면 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 모순
(\because 서로 다른 부분 집합)

④ $(2, 3)$ 이면 $n(A \cap B) = 3$ 이므로 모순

⑤ $(2, 4)$ 이면 $n(A \cap B) = 4$ 이므로 모순

⑥ $(3, 4)$ 이면 $n(A \cap B) = 6$ 이므로 모순

$(1, 2)$ or $(2, 1)$ 선택 2가지

$n(A) = 1, n(B) = 2$ 라 가정하면

$A = a, B = (a, b), (a, c), (a, d)$

$A = b, B = (b, a), (b, c), (b, d)$

$A = c, B = (c, a), (c, b), (c, d)$

$A = d, B = (d, a), (d, b), (d, c)$

12가지

$$\therefore P(X) = \frac{2 \times 12}{{}_{15}C_2 \times 2!} = \frac{4}{35}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{4}{35}$ 이다.

답 ③

075

$1_a, 1_b, 2, 3, 4$

표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = {}_5C_4 \times 4!$$

$a \leq b \leq c \leq d$ 인 사건을 A

① 1, 2, 3, 4

$1_a, 1_b$ 중 1개 선택 ${}_2C_1$

선택하면 a, b, c, d 가 정해지므로 1가지

② 1, 1, \square, \square

$1_a, 1_b$ 자리 바꾸기 2! ($1_a, 1_b$ 순이라고 가정)

2, 3, 4 중 2개 선택 ${}_3C_2$

선택하면 a, b, c, d 가 정해지므로 1가지

$$\therefore P(X) = \frac{{}_2C_1 + 2! \times {}_3C_2}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{15}$ 이다.

답 ①

Tip 확률에서는 같은 것도 서로 다른 것으로 보아야 한다고 Guide Step에서 학습하였다.

075번에서 1을 같은 것으로 가정하여 풀어도 될까?

이 문제는 같은 것으로 보아도 답이 같다.

한 번 확인해보자.

① 1, 2, 3, 4

배열 $4! = 24$ 가지

② 1, 1, \square, \square

2, 3, 4 중 2개 선택 ${}_3C_2$

배열 $\frac{4!}{2!}$

$$\Rightarrow {}_3C_2 \times \frac{4!}{2!} = 36 \text{ 가지}$$

이므로 표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = 24 + 36 \text{이다.}$$

이 중에서 $a \leq b \leq c \leq d$ 를 만족시키는 경우는

$(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4), (1, 1, 2, 3),$

$(1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 4)$

이렇게 4가지이므로 구하고자 하는 확률은

$$\frac{4}{24+36} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} \text{이다.}$$

도대체 왜 그럴까?

$(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$ 이 나올 확률은

분자 : $1_a, 1_b$ 중 1개 선택 ${}_2C_1$

분모 : ${}_5C_4 \times 4!$

$$\text{이므로 } \frac{{}_2C_1}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \text{이다.}$$

$(1, 2, 3, 4)$ 를 배열하여 얻은 24가지의 순서쌍의

발생 가능성은 모두 $\frac{1}{60}$ 이다.)

$(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$ 이 나올 확률은

분자 : $1_a, 1_b$ 자리 바꾸기 $2!$

분모 : ${}_5C_4 \times 4!$

$$\text{이므로 } \frac{2!}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \text{이다.}$$

$(1, 1, 2, 3/1, 1, 2, 4/1, 1, 3, 4)$ 를 배열하여

얻은 36가지의 순서쌍의 발생 가능성은 모두 $\frac{1}{60}$ 이다.)

즉, 이 문제에서는 각 근원사건의

발생 가능성이 모두 $\frac{1}{60}$ 로 동일하기 때문에

같은 것으로 보아도 답은 같다.

076

표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = 7!$$

수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로

정해지는 사건을 X 라 하고

두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이

발표하는 순서로 정해지는 사건을 Y 라 하자.

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ 를 이용하여 구해보자.

① $P(X)$

과학 동아리 a, b, c, d, e 수학 동아리 A, B

수학 동아리를 같은 문자 z 라 하면 $n(X)$ 는

z, z, a, b, c, d, e 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore P(X) = \frac{7!}{2!} = \frac{1}{2}$$

② $P(Y)$

A □ □ B 한묶음으로 보자.

두 수학 동아리의 발표 사이에 들어갈 과학 동아리 선택 ${}_5C_2$

(a, b 가 선택되었다고 가정)

a, b 자리 바꾸기 $2!$ (a, b 순이라고 가정)

A, B 자리 바꾸기 $2!$ (A, B 순이라고 가정)

나머지 $c, d, e, (A \boxed{a} \boxed{b} B)$ 배열 $4!$

$$\therefore P(Y) = \frac{{}_5C_2 \times 2! \times 2! \times 4!}{7!} = \frac{4}{21}$$

③ $P(X \cap Y)$

A □ □ B 한묶음으로 보자.

두 수학 동아리의 발표 사이에 들어갈 과학 동아리 선택 ${}_5C_2$

(a, b 가 선택되었다고 가정)

a, b 자리 바꾸기 $2!$ (a, b 순이라고 가정)

나머지 $c, d, e, (A \boxed{a} \boxed{b} B)$ 배열 $4!$

$$\therefore P(X \cap Y) = \frac{{}_5C_2 \times 2! \times 4!}{7!} = \frac{2}{21}$$

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{21} - \frac{2}{21} = \frac{25}{42}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{25}{42}$ 이다.

답 ③

077

표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = {}_6C_2 \times {}_6C_2$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 인 사건을 X 라 하면

$A \cap B = \emptyset$ 인 사건은 X^c 이다.

풀이1) 선택하면 자동배열 이용하기

1, 2, 3, 4, 5, 6가 적힌 6장의 카드에서 4개를

선택하면 ${}_6C_4$ (1, 2, 3, 4가 선택됐다고 가정)
 이때 $A \cap B = \emptyset$ 인 경우는
 $1 \leq x \leq 2, 3 \leq x \leq 4$ 밖에 가능하지 않으므로
 배열은 1가지이다. (선택만 하면 자동배열)
 $1 \leq x \leq 2, 3 \leq x \leq 4$ 를 집합 A, B 에 매칭시키기 2!

$$P(X^c) = \frac{{}_6C_4 \times 2!}{{}_6C_2 \times {}_6C_2} = \frac{2}{15} \text{이므로}$$

$$P(X) = 1 - P(X^c) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \text{이다.}$$

풀이2) 직접 세기

a_2 를 기준으로 case분류하면

① $a_2 = 2$

$a_1 = 1 \Rightarrow [1, 2]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_4C_2 = 6$ 가지
 $\therefore 6$ 가지

② $a_2 = 3$

$a_1 = 1 \Rightarrow [1, 3]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_3C_2 = 3$ 가지
 $a_1 = 2 \Rightarrow [2, 3]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_3C_2 = 3$ 가지
 $\therefore 6$ 가지

③ $a_2 = 4$

$a_1 = 1 \Rightarrow [1, 4]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow 1$ 가지
 $a_1 = 2 \Rightarrow [2, 4]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow 1$ 가지
 $a_1 = 3 \Rightarrow [3, 4]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow 2$ 가지
 $\therefore 4$ 가지

④ $a_2 = 5$

$a_1 = 1 \Rightarrow [1, 5]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow \times$
 $a_1 = 2 \Rightarrow [2, 5]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow \times$
 $a_1 = 3 \Rightarrow [3, 5]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow 1$ 가지
 $a_1 = 4 \Rightarrow [4, 5]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_3C_2 = 3$ 가지
 $\therefore 4$ 가지

⑤ $a_2 = 6$

$a_1 = 1 \Rightarrow [1, 6]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow \times$
 $a_1 = 2 \Rightarrow [2, 6]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow \times$
 $a_1 = 3 \Rightarrow [3, 6]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow 1$ 가지
 $a_1 = 4 \Rightarrow [4, 6]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_3C_2 = 3$ 가지
 $a_1 = 5 \Rightarrow [5, 6]$ 이므로 $[b_1, b_2] \Rightarrow {}_4C_2 = 6$ 가지
 $\therefore 10$ 가지

$$P(X^c) = \frac{6+6+4+4+10}{{}_6C_2 \times {}_6C_2} = \frac{2}{15} \text{이므로}$$

$$P(X) = 1 - P(X^c) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \text{이다.}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{13}{15}$ 이다.

답 ⑤

Tip1 여사건을 활용하는 문제이고 전체에서 $A \cap B = \emptyset$ 인 경우를 빼서 구할 수 있었다. 여사건은 평소에 자주 출제되는 포인트 중 하나이니 언제든지 여사건을 쓸 준비가 되어있어야 한다.

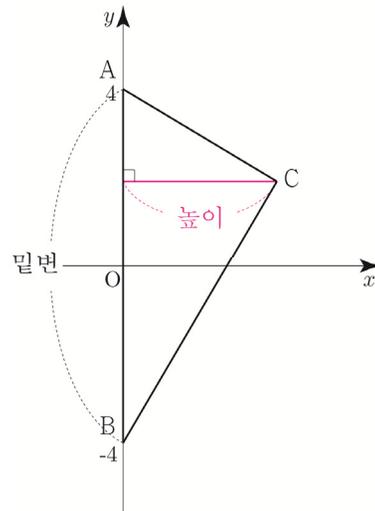
Tip2 솔직히 실전에서 풀이1)과 같은 사고를 하기가 쉽지 않기 때문에 a_2 를 기준으로 case분류하는 좀 더 일반적인 접근법인 풀이2)로 직접 풀어봤으면 좋겠다.

078

표본공간을 S 라 하면

$$n(S) = 6^2 = 36$$

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작은 사건을 X



$$\text{높이} = \left| m \cos \frac{n\pi}{3} \right|$$

Tip 길이어므로 절댓값 조심!

삼각형 ABC의 넓이 < 12

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \left| m \cos \frac{n\pi}{3} \right| < 12$$

조건부확률 | Master step

97	53	102	125
98	131	103	48
99	41	104	191
100	③	105	49
101	135	106	9

해설

097

세 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때,
나오는 눈의 수를 각각 A, B, C 라 하고
 A, B, C 를 4로 나눈 나머지를 각각 a, b, c 라 하자.

1, 2, 3, 4, 5, 6을 4로 나눈 나머지로 분류하면
다음과 같다.

나머지 0 \Rightarrow 4이므로 확률은 $\frac{1}{6}$

나머지 1 \Rightarrow 1, 5이므로 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

나머지 2 \Rightarrow 2, 6이므로 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

나머지 3 \Rightarrow 3이므로 확률은 $\frac{1}{6}$

$A+B+C$ 를 4로 나눈 나머지와 $a+b+c$ 를 4로 나눈
나머지는 서로 같다.

Tip $\langle A+B+C$ 를 4로 나눈 나머지와 $a+b+c$ 를
4로 나눈 나머지가 서로 같은 이유는 무엇일까? \rangle

고1때 나머지 정리를 학습한 바 있다.
 A 를 Q 로 나누었을 때, 몫을 P , 나머지를 R 이라
하면 $A = Q \times P + R$ 로 나타낼 수 있다.
 A, B, C 를 a, b, c 로 표현하면 다음과 같다.
 $A = 4P_1 + a, B = 4P_2 + b, C = 4P_3 + c$
 $A+B+C = 4(P_1+P_2+P_3) + a+b+c$
즉, $4(P_1+P_2+P_3)$ 은 4로 나누어 떨어지므로
나머지는 $a+b+c$ 에서 생긴다.
따라서 $A+B+C$ 를 4로 나눈 나머지와
 $a+b+c$ 를 4로 나눈 나머지는 서로 같다.

이를 이용하여 $a+b+c$ 의 값에 따라 case분류해 보자.
 $a+b+c \leq 9$ 이므로 $a+b+c$ 를 4로 나눈 나머지가 3인
경우는 $a+b+c=3, a+b+c=7$ 이렇게 2가지가 가능하다.

① $a+b+c=3$

1 1 1 $\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

0 0 3 $\Rightarrow {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{72}$

0 1 2 $\Rightarrow 3! \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

② $a+b+c=7$

1 3 3 $\Rightarrow {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

2 2 3 $\Rightarrow {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18}$

$\therefore \frac{1}{27} + \frac{1+8+2+4}{72} = \frac{1}{27} + \frac{5}{24} = \frac{53}{216} = p$

따라서 $216p = 216 \times \frac{53}{216} = 53$ 이다.

답 53

098

★의 개수에 따라 case분류해보자.

① $\square \square \Rightarrow \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

★ ★ ★ □ □

두 번째 시행한다고 해서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙을
수 없다.

② $\square \square \Rightarrow \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

★★ ★ □ □

두 번째 시행 후 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가
들어 있으려면 ★★ 를 선택하고 다른 하나를 선택하면 된다.

이때 확률은 $\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_5C_2} = \frac{4}{10}$ 이므로

$\frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$

$$\textcircled{3} \begin{array}{|c|} \hline \star \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \star \\ \hline \end{array} \Rightarrow \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

$\begin{array}{|c|} \hline \star\star \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \star\star \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$

두 번째 시행 후 \star 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있을 확률은 전체에서 스티커가 붙어 있지 않은 2개의 카드를 꺼낼 확률을 빼서 구하면 된다.

$$\text{이때 확률은 } 1 - \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{7}{10} \text{ 이므로 } \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{100}$$

$$\therefore \frac{24+7}{100} = \frac{31}{100}$$

따라서 $p+q=131$ 이다.

답 131

099

●●●●○○

꺼낸 3개의 공의 색깔에 따라 case분류하면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \text{ 꺼낸 3개의 공이 } \bullet\bullet\bullet \Rightarrow \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}$$

첫 번째 시행 후 주머니에 남아 있는 공은 ●○○

$$\text{꺼낸 3개의 공이 } \bullet\circ\circ \Rightarrow \frac{{}_1C_1 \times {}_2C_2}{{}_3C_3}$$

두 번째 시행의 결과 주머니에 남아 있는 공은 ○○○

$$\therefore \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_2C_2}{{}_3C_3} = \frac{1}{5}$$

$$\textcircled{2} \text{ 꺼낸 3개의 공이 } \bullet\bullet\circ \Rightarrow \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3}$$

첫 번째 시행 후 주머니에 남아 있는 공은 ●●○○

$$\text{꺼낸 3개의 공이 } \bullet\bullet\circ \Rightarrow \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_1}{{}_4C_3}$$

두 번째 시행의 결과 주머니에 남아 있는 공은 ○○○

$$\therefore \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} \times \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_1}{{}_4C_3} = \frac{3}{10}$$

$$\textcircled{3} \text{ 꺼낸 3개의 공이 } \bullet\circ\circ \Rightarrow \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3}$$

첫 번째 시행 후 주머니에 남아 있는 공은 ●●●○○

$$\text{꺼낸 3개의 공이 } \bullet\bullet\bullet \Rightarrow \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}$$

두 번째 시행의 결과 주머니에 남아 있는 공은 ○○○

$$\therefore \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{50}$$

구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{50}} = \frac{15}{10+15+1} = \frac{15}{26} \text{ 이다.}$$

따라서 $p+q=41$ 이다.

답 41

100

① 앞면이 나오는 확률 $\frac{1}{2}$ ($A \rightarrow B$)

② 뒷면이 나오는 확률 $\frac{1}{2}$ ($B \rightarrow A$)

상자 B입장에서 앞면이 나오면 +1, 뒷면이 나오면 -1

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후

8이 되려면 +2가 되어야 한다.

1 1 1 1 -1 -1

즉, 앞면 4개, 뒷면 2개가 나와야 한다.

6번째 시행 후 처음으로 8이 되려면 6번째 시행에는

반드시 앞면이 나와야 한다.

뒷면의 위치로 case분류해 보자.

(앞면 ○ 뒷면 X)

1번째	2번째	3번째	4번째	5번째	6번째	가능여부
X	X	○	○	○	○	✓
X	○	X	○	○	○	✓
X	○	○	X	○	○	✓
X	○	○	○	X	○	
○	X	X	○	○	○	✓
○	X	○	X	○	○	✓
○	X	○	○	X	○	
○	○	X	X	○	○	
○	○	X	○	X	○	
○	○	○	X	X	○	

5개 가능하다.

대칭성에 의해서 $m = \frac{21+24}{2} = 22.5$ 일 때,

$P(21 \leq Y \leq 24)$ 은 최댓값을 갖는다.

즉, $m = 22.5$ 와 가장 가까운 $m = 22$ 일 때, 최댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } P(21 \leq Y \leq 24) &= P\left(\frac{21-22}{2} \leq Z \leq \frac{24-22}{2}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.1915 + 0.3413 = 0.5328 \end{aligned}$$

이다.

답 ①

125

$$X \sim N\left(t, \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right)$$

$$G(t) = P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\frac{3}{2}-t}{\frac{1}{t^2}}\right) = P\left(Z \leq \frac{3}{2}t^2 - t^3\right) \text{이므로}$$

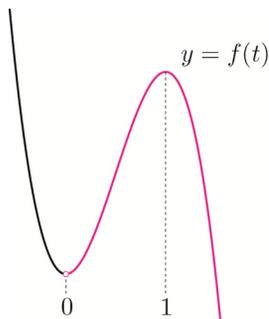
$\frac{3}{2}t^2 - t^3$ ($t > 0$)가 최댓값을 가질 때,

함수 $G(t)$ 가 최댓값을 갖는다.

$$f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t^3 \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 3t - 3t^2 = -3t(t-1)$$

$f'(t)$ 를 바탕으로 $f(t)$ 를 그리면



$f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최댓값 $f(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ 을 갖는다.

따라서 함수 $G(t)$ 의 최댓값은

$$G(1) = P\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) = 0.5 + 0.1915 = 0.6915 \text{이다.}$$

답 ③

126

$$P(Y = 3k-1) = \frac{1}{2}P(X=k) + a \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

확률의 합은 1이므로

$$\sum_{k=1}^4 P(Y = 3k-1) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2}P(X=k) + \sum_{k=1}^4 a = \frac{1}{2} + 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^4 kP(X=k) = \frac{7}{6}$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^4 (3k-1)P(Y=3k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^4 (3k-1)\left(\frac{1}{2}P(X=k) + \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^4 kP(X=k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 P(X=k) + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^4 (3k-1)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{7}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{4(2+11)}{2}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{2} + \frac{13}{4}$$

$$= \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

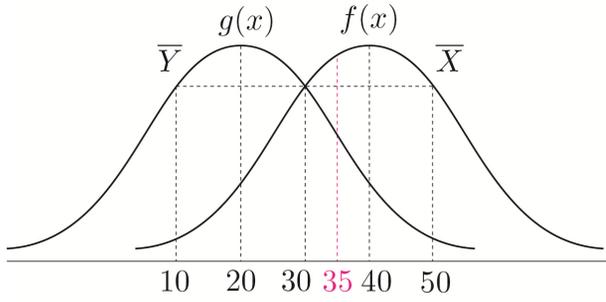
$$\text{따라서 } E\left(\frac{1}{a}Y + 5\right) = E(8Y + 5) = 8E(Y) + 5 = 8 \times \frac{9}{2} + 5 = 41$$

이다.

답 41

Tip 097번 해설에도 언급했듯이 126번에서는 대응되는 확률 $P(X)$, $P(Y)$ 이 서로 다르기 때문에 정의를 이용하여 풀어야 한다.

Guide step “개념파악하기 - (4) 이산확률변수 $aX+b$ 의 평균과 표준편차는 어떻게 구할까”에서도 학습했듯이 $Y = aX+b$ 라 할 때, $E(Y) = E(aX+b) = aE(X)+b$ 이 성립하는 이유는 $P(Y=y_i) = P(X=x_i)$ 이기 때문이다.



따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $P(\bar{X} \geq 50) = P(\bar{Y} \leq 10)$

$$P(\bar{X} \geq 50) = P\left(Z \geq \frac{50-40}{2}\right) = P(Z \geq 5)$$

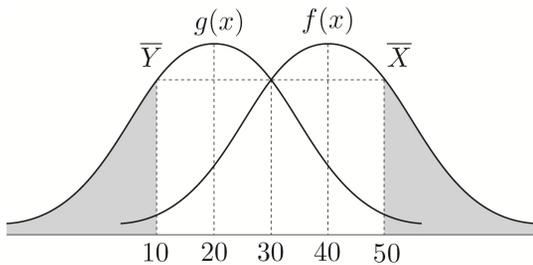
$$P(\bar{Y} \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-20}{2}\right) = P(Z \leq -5)$$

$$P(Z \geq 5) = P(Z \leq -5)$$

따라서 ㄷ은 참이다.

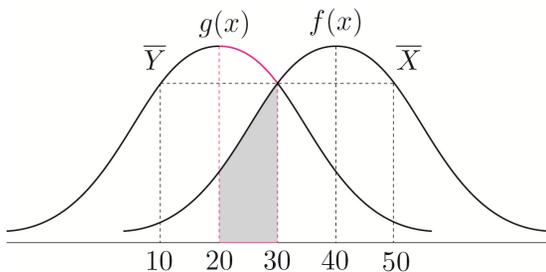
(대칭성을 이용하면 굳이 표준화를 하지 않아도)

$P(\bar{X} \geq 50) = P(\bar{Y} \leq 10)$ 임이 자명하다.)



ㄹ. $P(20 \leq \bar{X} \leq 30) < P(20 \leq \bar{Y} \leq 30)$

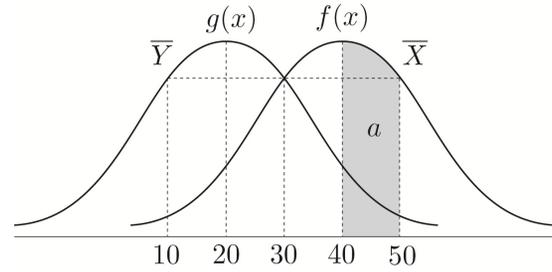
그림으로 판단해보자.



$$P(20 \leq \bar{X} \leq 30) < P(20 \leq \bar{Y} \leq 30)$$

따라서 ㄹ은 참이다.

ㅁ. $P(40 \leq \bar{X} \leq 50) = a$ 이면 $P(|\bar{Y} - 20| \geq 15) > 1 - 2a$ 이다.



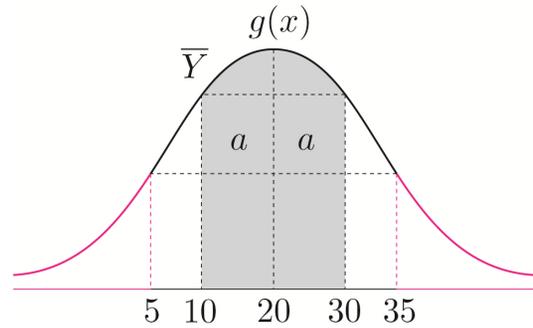
대칭성에 의해서

$$P(40 \leq \bar{X} \leq 50) = a \Rightarrow P(10 \leq \bar{Y} \leq 30) = 2a$$

$$P(|\bar{Y} - 20| \geq 15)$$

$$= P(\bar{Y} - 20 \leq -15) + P(\bar{Y} - 20 \geq 15)$$

$$= P(\bar{Y} \leq 5) + P(\bar{Y} \geq 35)$$



$$P(\bar{Y} \leq 5) + P(\bar{Y} \geq 35) < 1 - 2a$$

따라서 ㅁ은 거짓이다.

ㅂ. $P(\bar{X} \leq 42) + P(\bar{Y} \geq 18) = 1.6826$

$$P(\bar{X} \leq 42) = P\left(Z \leq \frac{42-40}{2}\right) = P(Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

$$P(\bar{Y} \geq 18) = P\left(Z \geq \frac{18-20}{2}\right) = P(Z \geq -1)$$

$$= 0.3413 + 0.5 = 0.8413$$

$$P(\bar{X} \leq 42) + P(\bar{Y} \geq 18) = 2 \times 0.8413 = 1.6826$$

따라서 ㅂ은 참이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

[수아] 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때,
그 그래프는 m 의 값이 일정할 때, σ 의 값이
커지면 대칭축의 위치는 변하지 않지만
곡선의 모양은 높이가 높아져. (X)

m 의 값이 일정할 때, σ 의 값이 커지면
대칭축의 위치는 변하지 않지만
곡선의 모양은 높이가 낮아진다.

답 성민, 민수, 헤민, 진아

031

Chapter 1) 확률변수와 확률분포

확률변수에는 (\neg : 이산확률변수)와 (\cup : 연속확률변수)가
있다. <단, \neg 은 셀 수 있고, \cup 은 셀 수 없다.>

(\neg : 이산확률변수)가 이루는 분포를 함수로 나타낸 것을
(\cup : 확률질량함수)라 한다.

(\cup : 연속확률변수)가 이루는 분포를 함수로 나타낸 것을
(\cup : 확률밀도함수)라 한다.

(\cup : 확률질량함수)의 성질

$P(X=x_i)=p_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$)일 때,

① ($0 \leq p_i \leq 1$)

② $\sum_{i=1}^n p_i = (1)$

③ $P(1 \leq X \leq 3) = (P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$
(단, X 는 자연수)

(\cup : 확률밀도함수) $f(x)$ 의 성질

① ($f(x) \geq 0$)

② $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (1)$ (단, $[\alpha, \beta]$ 에서 정의)

③ $P(1 \leq X \leq 3) = (\int_1^3 f(x)dx)$ (단, $\alpha \leq 1, 3 \leq \beta$)

Chapter 2) 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

이산확률변수 X 의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n	합계
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	\dots	p_n	1

기댓값(= 평균)은 기호로 ($E(X)$)이고

정의는 ($x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\dots+x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$)이다.

분산은 기호로 ($V(X)$)이고

정의는 이산확률변수 X 의 기댓값을 m 이라 할 때,
($(X-m)^2$)의 기댓값이다.

시그마로 표현하면 ($\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2 p_i$)이다.

또한 분산의 다른 공식은 ($V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$)이다.

표준편차는 기호로 ($\sigma(X)$)이고

정의는 분산의 양의 (제곱근)이다. ($\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$)

이산확률변수 $aX+b$ 의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X 와 임의의 두 상수 a, b ($a \neq 0$)에 대하여
 $E(aX+b) = (aE(X)+b)$
 $V(aX+b) = (a^2 V(X))$
 $\sigma(aX+b) = (|a|\sigma(X))$

Chapter 3) 이항분포

이항분포의 확률변수는 (\neg)확률변수이다.

① 정의 : 사건 A 가 일어날 확률이 p 로 일정할 때,
 n 번의 독립시행에서 사건 A 가 일어나는
(횟수)를 확률변수 X 라 하였을 때,
확률질량함수는

$P(X=x) = ({}_n C_x p^x (1-p)^{n-x})$ 이다.

(단, $x=0, 1, 2, \dots, n$)

이러한 확률분포를 이항분포라 한다.

② 기호 : $B(a: n, b: p)$

($a: n$)는 (총 시행 횟수)이고

($b: p$)는 (각 시행에서 사건 A 가 일어날 확률)이다.

이항분포의 평균 = (np)

이항분포의 분산 = ($np(1-p)$)

이항분포의 표준편차 = ($\sqrt{np(1-p)}$)

$$\bar{X} \sim N\left(295, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$$

$$P(\bar{X} \geq 300) = P\left(Z \geq \frac{300-295}{\frac{\sigma}{3}}\right) = P\left(Z \geq \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \text{ 이므로}$$

$$\frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 15$$

$$k = \frac{30}{\sigma} = \frac{30}{15} = 2$$

a (%) 값은 k 에 따라 달라지므로

$$P(|Z| \leq 2) = 0.9544 \Rightarrow \text{신뢰도 } 95.44\%$$

따라서 $a = 95.44$ 이다.

답 ④

078

1의 숫자가 적혀 있는 카드 n 개

2의 숫자가 적혀 있는 카드 $n+5$ 개

상자에서 카드를 뽑아 확인한 수를 확률변수 X 라 하자.

확률변수의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{n}{2n+5}$	$\frac{n+5}{2n+5}$	1

이 모집단에서 크기가 3인 표본을 복원추출하여 추출한 표본을 각각 X_1, X_2, X_3 라고 하자.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

순서쌍 (X_1, X_2, X_3) 으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{X} = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$$

$$\bar{X} = \frac{4}{3} \Rightarrow (1, 1, 2) (1, 2, 1) (2, 1, 1)$$

$$\bar{X} = \frac{5}{3} \Rightarrow (1, 2, 2) (2, 1, 2) (2, 2, 1)$$

$$\bar{X} = 2 \Rightarrow (2, 2, 2)$$

$$P(\bar{X} > 1) = \frac{26}{27} \text{ 이므로 } P(\bar{X} = 1) = \frac{1}{27} \text{ 이다.}$$

$$P(\bar{X} = 1) = \left(\frac{n}{2n+5}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow n = 5$$

이제 위의 표에 n 을 대입하면 다음과 같다.

X	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$E(4\bar{X}) = 4E(\bar{X}) = 4E(X) = 4\left(\frac{1+4}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

Tip 054번에서 학습했듯이, 물론 \bar{X} 의 분포를 표로 나타낸 후 구해도 되지만 출제의도는 $E(\bar{X}) = E(X)$ 임을 이용하는 것이다.

$$\bar{X} = \frac{5}{3} \Rightarrow (1, 2, 2) (2, 1, 2) (2, 2, 1)$$

$$P\left(\bar{X} = \frac{5}{3}\right) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{따라서 } \frac{E(4\bar{X})}{P\left(\bar{X} = \frac{5}{3}\right)} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{180}{12} = 15$$

답 15

Tip 이때까지 복습을 잘했다면 깔끔하게 풀려야 정상이다. 만약 문제를 풀 때, 조금이라도 매끄럽지 않았다면 Training-1step, 2step에 있는 표본평균에 대한 문제를 찾아 다시 복습하도록 하자.

079

$$X \sim N(m, 4^2)$$

$$n = 16 \text{ 이므로}$$

$$\bar{X} \sim N(m, 1^2)$$

$$(가) P(X \leq -11) = P(X \geq 13) = 0.0013$$

$$P(X \leq -11) = P(X \geq 13) \Rightarrow m = \frac{-11+13}{2} = 1$$

$$X \sim N(1, 4^2), \bar{X} \sim N(1, 1^2) \text{ 이므로}$$