2

[수능적 해법]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{3}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

[정답] ③

3

[수능적 해법]

$\sin x+\sqrt{7}\cos x-\sqrt{2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}\sin(x+\alpha)-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)-\sqrt{2}$에서 $2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

즉, $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$가 최댓값이다. … [1)]

[정답] ①

4

[수능적 해법]

$$\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=3\int_0^1\sqrt{x}\,dx=3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=3\times\frac{2}{3}=2$$

[스피드 해법]

이차곡선과 x축과 y축 등으로 둘러싸인 넓이는 정해진 비율 $2:1$의 넓이비를 가진다. … [2)] 따라서 곡선 $y=3\sqrt{x}$와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $3\times\dfrac{2}{2+1}=2$임을 알 수 있다.

[정답] ②

5

[수능적 해법]

$2:1$ 내분점은

$$\frac{\mathrm{A}+2\mathrm{B}}{3}=\left(\frac{1\times2+2\times5}{3},\ \frac{1\times a+2\times(-3)}{3},\ \frac{1\times(-2)+2\times b}{3}\right)$$

$=\left(4,\ \dfrac{a-6}{3},\ \dfrac{2b-2}{3}\right)$인데 x축 위의 점이므로 $\dfrac{a-6}{3}=\dfrac{2b-2}{3}=0$이어야 한다.

즉, $a=6$, $b=1$이다.

[정답] ④

1) 일반적으로 x에 범위가 딱히 주어져 있지 않으면 $a\sin x+b\cos x$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

2) 적분과 통계(상) 수능특강에서 배울 수 있는 넓이비를 활용한 것이다.

일반적으로 곡선 $y=ax^n\,(a>0)$과 직선 $x=p\,(p>0)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하고 곡선 $y=ax^n\,(a>0)$과 직선 $y=ap^n$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 하면 $S:T=1:n$을 만족시킨다.

이러한 사실을 외우기보다는 직접 정적분을 통해 증명해보도록 하자.

6

[수능적 해법]

$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$이므로 $a=3$이다.

[정답] ③

8

[수능적 해법]

집합 A^c과 B가 배반사건이면 $A \supset B$임을 알 수 있다. … [1)]

주어진 식에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$이고,

$A \supset B$에서 $\mathrm{P}\left(A \cap B^c\right)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$임을 알 수 있고, $\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$이다.

[정답] ②

9

[수능적 해법 1]

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$에서 $\frac{k}{n}=x_k$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} 2f(1+2x_k)(x_k-x_{k-1})=\int_0^1 2f(1+2x)dx=\int_0^1 \frac{2}{1+2x}dx$

$=\Big[\ln(1+2x)\Big]_0^1=\ln 3$

[수능적 해법 2]

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$에서 $1+\frac{2k}{n}=x_k$라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})$

$=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\Big[\ln x\Big]_1^3=\ln 3$

[정답] ②

10

[수능적 해법 1]

오른쪽 그림과 같이 작도하면 삼각형의 닮음비를 활용할 수 있다. … [2)]

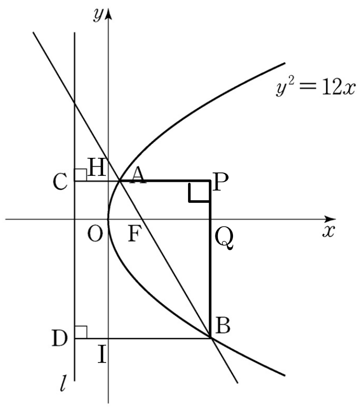
$\overline{\mathrm{BD}}=b$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=b-4$, $\overline{\mathrm{FQ}}=b-6$

이고, $\overline{\mathrm{AF}}=4$, $\overline{\mathrm{FB}}=b$이다.

삼각형 APB와 삼각형 FQB에서 닮음비를 활용하면 $b-4:b+4=b-6:b$에서

$(b+4)(b-6)=b(b-4)$, $b^2-2b-24=b^2-4b$

이고, $b=12$이다.



1) 벤다이어그램을 그려보면 쉽게 알 수 있다.

2) 그림에서 점 P는 직선 CH와 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 만나는 점이다. 또한 직선 PB와 x축이 만나는 점을 Q라 한 것이다.

[수능적 해법 2]

오른쪽 그림의 사다리꼴 CDBA에서

닮음을 활용하자. $\overline{\mathrm{BD}}=b$라 하면

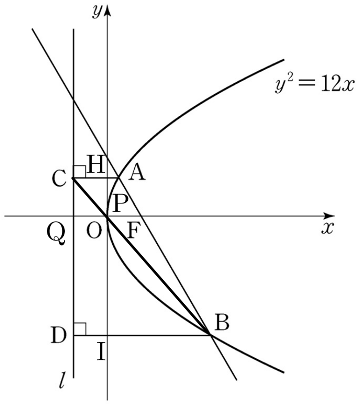
$\overline{\mathrm{AF}}=4$, $\overline{\mathrm{FB}}=b$이다.

선분 BC와 x축이 만나는 점을 P라 하면

삼각형 BDC와 삼각형 PQC가 닮음이고

삼각형 ACB와 삼각형 FPB가 닮음이므로

각각 닮음비를 활용하자.



$\overline{\mathrm{QP}}=b\times\dfrac{4}{b+4}=\dfrac{4b}{b+4}$

$\overline{\mathrm{PF}}=4\times\dfrac{b}{b+4}=\dfrac{4b}{b+4}$

이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=\dfrac{4b}{b+4}=3$에서 $b=12$임을 알 수 있다.

[스피드 해법]

수능특강에서 배운 포물선에 관한 공식 중 하나인 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{p}$에 대입하자.

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{3}$에서 $b=12$임을 쉽게 알 수 있다. ⋯ [1)]

[정답] ①

1) 이 공식으로 빨리 풀리는 수능 문제가 13수능과 15수능에 총 2번 출제가 되었다.
하지만 이러한 공식을 외우는 식으로 공부한다면 절대 수학실력이 늘지 않음을 명심하자.
공식을 유도하는 과정이 곧 문제풀이 과정이니 유도하는 과정을 공부하도록 하고, 공식은 자연스레 외워지면 활용하고 안 외워지면 안 외워진 대로 공부하면 된다.

11

[수능적 해법 1]

$\mathrm{P}(76\le X\le 78)=\mathrm{P}\left(\dfrac{76-75}{2}\le Z\le\dfrac{78-75}{2}\right)=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=0.4332-0.1915=0.2417$

[수능적 해법 2]

76, 78은 각각 평균에서 표준편차의 0.5배, 1.5배 만큼 떨어져 있으므로

$0.4332-0.1915=0.2417$임을 쉽게 알 수 있다.

[정답] ⑤

12

[수능적 해법]

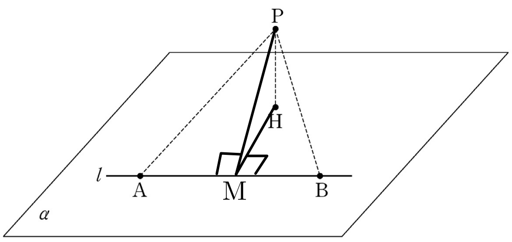
그림과 같이 점 H에서 직선 l에

내린 수선의 발을 M이라 하면

삼수선의 정리에 의하여

선분 PM과 직선 l도 수직이다.

삼각형 PAB에서 선분 PM의



길이는 $6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$이다. 삼각형 PMH에서 피타고라스의 정리를 활용하면

$\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\sqrt{11}$이다.

[정답] ①

14

[수능적 해법]

문제에서 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$가 주어져 있는데, 접선의 기울기에 관한 문제이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$을 기울기와 관련된 식으로 해석해보자. … [1] $f(x)=3^x$라 하고, $g(x)=a^{x-1}$이라 하자. $f'(k)=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$, $g'(k)=\dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$을 활용하면 $2f'(k)=g'(k)$이다. 즉, $2(\ln 3)3^k=(\ln a)a^{k-1}$인데 k는 $3^k=a^{k-1}$을 만족시키는 k이므로 $2(\ln 3)=\ln a$에서 $a=9$이다.

[정답] ④

1) 노가다를 통해 단순히 방정식 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$을 풀어도 정답을 구할 수 있다.
하지만 [수능적 해법]에 비해 계산이 많은 편이다.

15

[수능적 해법]

320명을 60%와 50%를 토대로 분류하면 다음과 같다.

	남자	여자
수학동아리에 가입한 사람	$6a$	$5b$
수학동아리에 가입하지 않은 사람	$4a$	$5b$

따라서 $p_1=\dfrac{6a}{6a+5b}$, $p_2=\dfrac{5b}{6a+5b}$임을 알 수 있다.

주어진 식 $p_1=2p_2$에서 $\dfrac{6a}{6a+5b}=2\times\dfrac{5b}{6a+5b}$이므로 정리하면 $3a=5b$

이고 $10a+10b=320$, $a+b=32$이므로 $3a=5b$에 대입하면

$3a=5(32-a)=160-5a$, $8a=160$에서 $a=20$이다.

즉, 남학생의 수는 $6a+4a=10a=200$

[정답] ④

18

[수능적 해법]

평균이 2가 되려면 $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ 3가지 방법이 있다. … [2]

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{2}{8}\times\dfrac{2}{8}+\dfrac{5}{8}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{5+4+5}{64}=\dfrac{14}{64}=\dfrac{7}{32}$

[정답] ⑤

2) 복원추출이므로 독립시행으로 계산해주면 된다.

19

[수능적 해법]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}})=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=6$ … [3]

3) 직선 AP는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.
따라서 직선 AP와 직선 PQ는 수직이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$이다.

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{6}$임을 알 수 있다.

$\frac{x}{2}=6-x=z-6=t$에서 점 A의 좌표를 $(2t,\ 6-t,\ 6+t)$라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{(2t-2)^2+(6-t-5)^2+(6+t-7)^2}=\sqrt{6(t-1)^2}=\sqrt{6}$

에서 $t=2$ or $t=0$이다. 그런데 $a>0$에서 $t=2$임을 알 수 있으므로

점 A의 좌표는 $(4,\ 4,\ 8)$이다. $4+4+8=16$

[정답] ②

20

[수능적 해법] … [1)]

원의 중심을 O라 하면 $\angle\mathrm{OAC}=\frac{\theta}{2}$이므로 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

이다. 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\pi-2\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cos\theta}$

삼각형 BDC의 넓이를 구해야 하는데 $\overline{\mathrm{BC}}$를 알고 있으므로 $\overline{\mathrm{CD}}$만 구하면 두 변과 사잇각을 통해 넓이를 구할 수 있다.

$\overline{\mathrm{CD}}$를 구하기 위해 $\angle\mathrm{ADC}=\pi-3\theta$임을 활용하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\frac{\theta}{2}}$이므로 삼각형 BDC의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cos\theta}\right)\left(\frac{2\sin\theta}{\sin3\theta\tan\frac{\theta}{2}}\right)(\sin\theta)$$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$이다. 즉, 극한값은 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\dfrac{\theta\sin^2\theta}{\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}{\left(\frac{\sin3\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)^2\cos\theta}=\frac{(1)^2}{(3)\left(\frac{1}{2}\right)^2(1)}=\frac{4}{3}$$ 이다.

[스피드 해법] … [2)]

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\dfrac{\theta\sin^2\theta}{\sin3\theta\tan^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}$에서 근사를 활용하면 $\dfrac{\theta^3}{(3\theta)\left(\frac{\theta}{2}\right)^2(1)}=\dfrac{4}{3}$임을

쉽게 알 수 있다.

[정답] ④

1) 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 할 때

$\overline{\mathrm{CH}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta$

$=\overline{\mathrm{BC}}\sin2\theta$

$=\overline{\mathrm{CD}}\sin3\theta$

와 같이 한 번에 나타낼 수도 있다.

2) 흔히 활용되는 근사는

$f(\theta)\to0$일 때,

$\sin f(\theta)=f(\theta)$

$\tan f(\theta)=f(\theta)$

$1-\cos f(\theta)=\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2$

가 있다.

23

[수능적 해법]

$f'(x) = -\sin x + 8e^{2x}$에서 $f'(0) = -0 + 8 = 8$

[정답] 8

24

[수능적 해법]

$x^2 - 6x = X$라 치환하면 주어진 식은 $\sqrt{X-1} = X-3$이다.

양변을 제곱하면 $X-1 = X^2 - 6X + 9$, $X^2 - 7X + 10 = 0$, $(X-2)(X-5) = 0$

에서 $X = 2$ or $X = 5$인데, $X = 2$는 대입해보면 무연근임을 알 수 있다.

따라서 $X = 5 = x^2 - 6x$에서 $x^2 - 6x - 5 = 0$이므로 실근의 곱은 -5이고

$5^2 = 25$

[정답] 25

26

[수능적 해법]

(가)조건에서 $a \times b \times c$가 홀수이려면 a, b, c 모두 홀수이어야 한다.

또한 (나)조건에서 $a \leq b \leq c \leq 20$에서 순서가 정해져 있으므로

즉, 20이하의 홀수 1, 3, 5, ⋯, 17, 19 중에서 3개를 중복해서 선택하기만

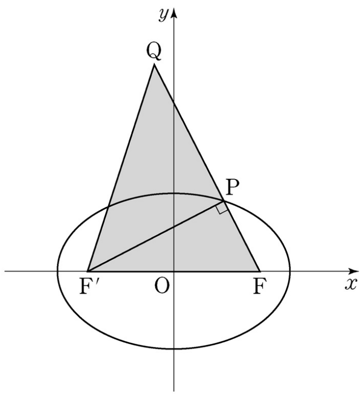
하면 순서는 알아서 정해진다고 생각하면 된다. ⋯ 1)

따라서 ${}_{10}H_3 = {}_{12}C_3 = \dfrac{12!}{3!\,9!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 2 \times 11 \times 10 = 220$ ⋯ 2)

[정답] 220

27

[수능적 해법]



오른쪽 그림에서 $\overline{FP} = a$, $\overline{F'P} = b$라 하면

타원의 정의에 의하여 $a + b = 3 \times 2 = 6$

이고 직각삼각형 FPF'에서 피타고라스의

정리를 활용하면 $a^2 + b^2 = \left(2\sqrt{9-4}\right)^2 = 20$

이다. 두 식을 연립하면

$a^2 + (6-a)^2 = 2a^2 - 12a + 36 = 20$

에서 $a^2 - 6a + 8 = 0$, $(a-2)(a-4) = 0$

$a = 2$ or $a = 4$인데, 그림에서 점 P는

제1사분면 위의 점이므로 $a = 2$, $b = 4$이다. 그런데 삼각형 FQF'의 밑변은

$\overline{FQ} = 6$으로 주어져 있고 높이는 $\overline{F'P} = b = 4$이므로 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

이다.

[정답] 12

1) 예를 들어,
1, 5, 5가 선택되었으면
차례대로 $a = 1$, $b = 5$, $c = 5$
라고 생각하면 된다.
즉, 선택하기만 하면 a, b, c는
자동으로 결정된다.

2) 이 문제에서 (나)조건만
$a < b < c < 20$으로 바꾼
후 문제를 풀어보자.

2015.11 분석 및 해제

28

[수능적 해법] … [1)]

$f(0)=0$, $f'(x)=(a-x)e^x$인데, e^x는 양수이므로 $f'(x)$는 $x=a$에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌는 것을 알 수 있다.

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 극대(최대)를 가지므로

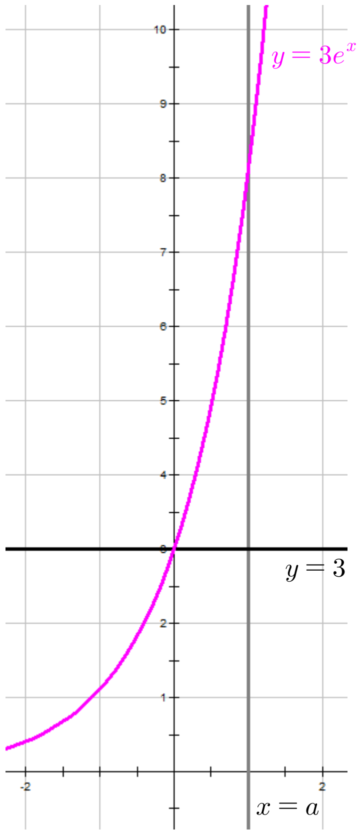
$$32=f(a)=\int_0^a (a-t)e^t\,dt=\int_0^a \left(ae^t-te^t\right)dt$$

$$=a\int_0^a e^t\,dt-\int_0^a te^t\,dt$$

$$=a\left(e^a-1\right)-e^a(a-1)-1=-a+e^a-1$$

에서 $e^a-a=33$이다.

곡선 $y=3e^x$와 두 직선 $x=a$, $y=3$을 그래프로 그려보면 다음과 같다.



따라서 둘러싸인 넓이는

$$\int_0^a \left(3e^x-3\right)dx=3\left[e^x-x\right]_0^a$$

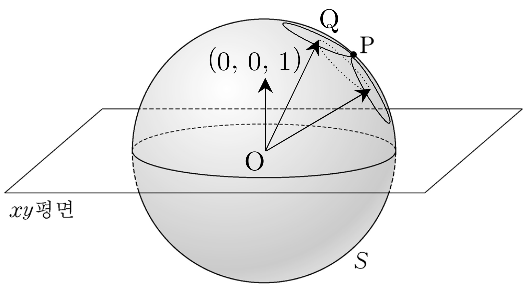
$$=3\left(e^a-a-1\right)=3(33-1)=96$$

[정답] 96

29

[수능적 해법 1]

구 S의 반지름은 $5\sqrt{2}$이고 원 C의 반지름은 1이므로 대략적인 그림을 그려보면 다음과 같다.



그림과 같이 xy평면의 법선벡터와 (가)에서의 평면의 법선벡터가 이루는 각을 생각해보자. (가)에서의 평면의 법선벡터는 위 그림에서처럼 원뿔을 그리면서 뱅글뱅글 돌고 있다고 생각할 수 있는데, 이때 두 벡터가 이루는 각이 최소가 되어야 정사영

1) $f(x)=\int_a^x g(t)dt$이 문제에 등장하면 첫 번째로 $f(a)=0$ 두 번째로 $f'(x)=g(x)$를 구해봐야 한다. CP에서 배울 수 있는 내용이다.

의 넓이가 최대가 된다.

따라서 그림과 같이 평면 OPQ가 yz평면이 되도록 종점 Q가 위치할 때, 정사영의 넓이가 최대가 되는 것을 알 수 있고, 그 각을 구해보자.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $(0, 0, 1)$이 이루는 각은 $\frac{\pi}{4}$이므로 우리가 구하는 값은

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \angle\mathrm{POQ}\right)$이다. 그림에서 $\sin\angle\mathrm{POQ} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \angle\mathrm{POQ}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle\mathrm{POQ} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle\mathrm{POQ}$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$임을 알 수 있다.

즉, 구하는 정사영의 넓이의 최댓값은 $1^2\pi \times \cos\left(\frac{\pi}{4} - \angle\mathrm{POQ}\right) = \frac{4}{5}\pi$

따라서 $5 + 4 = 9$

[수능적 해법 2]

(가)에서 점 P를 지나는 평면의 법선벡터를 (a, b, c)라 하자. $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$

원 C의 반지름의 길이가 1이므로 피타고라스의 정리를 활용해서 구의 중심에서 평면까지의 거리를 구할 수 있는데, 그 거리가 $\sqrt{50 - 1} = 7$이다.

평면의 방정식은 $ax + b(y-5) + c(z-5) = 0$이므로 원점에서의 거리를 구하면

$\frac{|-5b - 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = |5b + 5c| = 7$이다.

또한 평면과 xy평면이 이루는 각은 두 벡터 $(0, 0, 1)$과 (a, b, c)가 이루는 각이므로 그 각을 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{c}{1 \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = c$이다. 따라서 원 C의 정사영의 넓이는 $\pi \times c = c\pi$이므로 c의 최댓값을 찾으면 된다.

b축, c축이 있는 좌표평면에서 원을 나타내는 $b^2 + c^2 = 1 - a^2$과

두 직선을 나타내는 $|b + c| = \frac{7}{5}$을 만족하는 실수 c의 최댓값을 찾으면 되는데,

그래프를 그려보면 직선과 원의 교점의 c좌표가 제일 큰 순간을 찾으면 되는 것을 알 수 있다. … 1) 즉, 원이 제일 큰 순간을 봐야 하므로 $a = 0$이어야 하고,

$b^2 + c^2 = 1$과 $b + c = \frac{7}{5}$를 연립해서 나온 c의 값 중 더 큰 값을 찾으면 된다.

즉, $c = \frac{4}{5}$이므로 최댓값은 $\frac{4}{5}\pi$이다. … 2)

따라서 $5 + 4 = 9$

[정답] 9

1) 삼각치환 등을 활용해도 최댓값을 찾을 수 있다.

2) 연립할 때, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$을 좌표공간의 구로 해석하고 $|b + c| = \frac{7}{5}$을 두 평면으로 해석해서 그래프를 그려보면, $a = 0$일 때 c가 최댓값을 가질 수 있음을 직관적으로 파악할 수 있다.

30

[수능적 해법]

미분 불가능할 가능성이 있는 후보를 체크하는 것이 핵심이다.

먼저 $f(x)=|\bigcirc|+|\bigstar|+|\triangle|+\cdots$꼴의 함수는 절댓값 내부에 있는 함수가 미분가능하다면 $\bigcirc=0$, $\bigstar=0$, $\triangle=0$을 만족시키는 x에서 미분 불가능할 가능성이 있고 나머지 점에서는 항상 미분가능한 것을 추측할 수 있다.

$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$에서 미분 불가능한 후보를 찾자.

① $|f(x)|=|e^{x+1}-1|$이므로 $x=-1$에서 미분 불가능할 가능성이 있다.

② $|f(x^k)|=|e^{x^k+1}-1|$

(a) k가 홀수: $x=-1$에서 미분 불가능할 가능성이 있다.

(b) k가 짝수: $e^{x^k+1}-1>0$이므로 미분 불가능할 가능성이 있는 점은 없다.

즉, $x=-1$에서의 미분 가능성만 확인해주면 실수 전체의 집합에서의 미분가능성을 판단할 수 있다. $x=-1$에서만 미분불가능할 가능성이 있으므로 함수를 $x\geq -1$인 경우와 $x<-1$인 경우로 나누어서 생각해보면 된다.

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

$$=\begin{cases}100f(x)-\left(f(x)+f(x^2)+f(x^3)+\cdots\right) & (x\geq -1)\\ -100f(x)-\left(-f(x)+f(x^2)-f(x^3)+\cdots\right) & (x<-1)\end{cases}$$

각 구간에서는 미분가능한 함수이므로 단순 미분을 통해 각각의 도함수에 -1을 대입해서 두 값이 같을 조건을 찾으면 된다. … [1]

$$g'(x)=\begin{cases}100f'(x)-\left(f'(x)+2xf'(x^2)+3x^2f'(x^3)+\cdots\right) & (x>-1)\\ -100f'(x)-\left(-f'(x)+2xf'(x^2)-3x^2f'(x^3)+\cdots\right) & (x<-1)\end{cases}$$

에서 두 식에 $x=-1$을 각각 대입한 후 같을 조건을 찾자.

$100f'(-1)-(f'(-1)-2f'(1)+3f'(-1)-4f'(1)+\cdots)$

$=-100f'(-1)-(-f'(-1)-2f'(1)-3f'(-1)-4f'(1)-\cdots)$

에서 $200f'(-1)=2(f'(-1)+3f'(-1)+5f'(-1)+\cdots)$

$100f'(-1)=f'(-1)+3f'(-1)+5f'(-1)+\cdots$인데 $f'(x)=e^{x+1}$에서 $f'(-1)=1$이므로 $100=1+3+5+\cdots+19$임을 알 수 있고, 짝수항은 어차피 소거되므로 $n=19$, 20이 모두 가능한 것을 알 수 있다. 따라서 $19+20=39$

[정답] 39

1) 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$이 $x=a$에서 미분가능하려면 단순히 $f'(a)=g'(a)$이면 된다. 이는 미분계수의 정의로 증명해보도록 하자.