2021학년도 대학수학능력시험 대비
기대X녹색지대 수능직전모의고사
수학 영역(가 형)

정 답

1	②	2	③	3	④	4	③	5	⑤
6	②	7	⑤	8	①	9	④	10	②
11	④	12	①	13	②	14	⑤	15	①
16	③	17	④	18	③	19	①	20	②
21	⑤	22	12	23	10	24	18	25	45
26	179	27	16	28	30	29	262	30	29

<1주차 수리논술 Final>

	수업시간/설명	신청페이지
논술 Basic		

	수업시간/설명	신청페이지
한양대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
한양대 의예과		

	수업시간/설명	신청페이지
건국대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
동국대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
서울과기대 Final		

출제자

이재종 (성균관대 수학교육과)

- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 2013년 네이버 파워지식in
- 녹색지대 모의고사 2020 출제 및 제작

김기대 (고려대학교 수학과)

- 2015년~2020년 기대모의고사 저자
- 고려대, 서강대 등 수리논술 5회 합격 (All 수학과)
- 대학생/강사신분 현장응시한 수능(평가원) All 100(5회)

수능표본 예상 등급컷 (가형)

1등급컷 : 88
2등급컷 : 80~81
3등급컷 : 72~73

<2주차 수리논술 Final>

	수업시간/설명	신청페이지
연세대 Basic		

	수업시간/설명	신청페이지
광운+세종 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
중앙대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
이화여대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
아주대 Final		

	수업시간/설명	신청페이지
한양에리카 Final		

주의사항

2. 수능직전모의고사 성격에 알맞게, 기대모의고사 출판본에 비해 담백하게 제작된 모의고사입니다.

3. 오타나 오류제보는 kidae6150@naver.com 으로 메일 바랍니다.

<3주차 수리논술 Final>

	수업시간/설명	신청페이지
인하대 Final		

해 설

1. [출제 의도] 로그의 계산을 할 수 있는가?

$$\log_2 3 \times \log_9 \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_2 3 \times \left(-\frac{1}{4}\log_3 2\right) = -\frac{1}{4}$$

2. [출제 의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 3$$

3. [출제 의도] 등비중항의 성질을 이해하고 있는가?

$a_3 a_5 = 1$이므로 등비중항의 성질에서 ${a_4}^2 = 1$이고, $a_1 > 0$이고 수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로 $a_4 > 0$이다.

따라서 $a_4 = 1$이고 $a_7 = a_4 \times 2^3 = 8$이므로

$a_4 + a_7 = 1 + 8 = 9$

4. [출제 의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$이다.

또한

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

에서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B^C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)+\{1-\mathrm{P}(B)\}-\mathrm{P}(A)\\&=1-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

5. [출제 의도] 지수함수와 로그함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+3x+1)}{e^{2x}-1}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{\ln(x^2+3x+1)}{x^2+3x}\times\frac{x^2+3x}{2x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

6. [출제 의도] 확률밀도함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

문제의 조건에서 $f(x+2)=f(x)$이고,

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\dfrac{1}{9}$이므로

$\mathrm{P}(-2\le X\le -1)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\dfrac{1}{9}$

이고,

$\mathrm{P}(-3\le X\le -2)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

이다. 이때 확률밀도함수의 성질에서

$\mathrm{P}(-3\le X\le 3)=1$이므로

$\mathrm{P}(-3\le X\le -2)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\dfrac{2}{9}$

임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(-2\le X\le 1)\\&=\mathrm{P}(-2\le X\le -1)+\mathrm{P}(-1\le X\le 0)\\&\qquad+\mathrm{P}(0\le X\le 1)\\&=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

7. [출제 의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{5}$이므로 문제의 조건에서

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin C\\&=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin C\\&=6\sin C=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos C\\&=(2\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2-2\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{2}{3}\\&=24+6-16=14\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{14}$

8. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

합성함수의 미분법에서

$g'(x)=(3x^2-1)\times f'(x^3-x)$

이고,

$f'(x)=2e^{2x}-ke^x$이므로 $f'(0)=2-k$

이다. 따라서

$g'(1)=2\times f'(0)=4-2k$

이므로 문제의 조건에서

$4-2k=2\quad\therefore\ k=1$

9. [출제 의도] 실수의 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 수 있는가?

자연수 $n\ (n\ge 2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 아래 표와 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

따라서 $f(n)=0$인 경우는

(i) $n^2-9=0$ 이거나

(ii) $n^2-9>0$이고 $n+1$이 짝수인 경우이다.

(i) $n^2-9=0$인 경우는 $n=3$인 경우뿐이다.

(ii) $n^2-9>0$인 경우는 $n>3$인 경우이고, $n+1$이 짝수인 경우는 $n=3, 5, 7, 9, 11, 13$인 경우이다.

따라서 $n=5, 7, 9, 11, 13$일 때 $f(n)=0$이다.

(i), (ii)에서

문제의 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$3+5+7+9+11+13=48$

10. [출제 의도] 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 계산할 수 있는가?

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{2}{\sqrt{t+1}}$에서

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=\frac{1}{t+1}+\left(1-\frac{2}{\sqrt{t+1}}\right)^2\\&=\frac{5}{t+1}-\frac{4}{\sqrt{t+1}}+1\\&=5\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\end{aligned}$$

이므로 점 P의 속력은

$\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}=\dfrac{2}{5}$일 때 최솟값을 갖는다.

$2\sqrt{t+1}=5$에서

$t+1=\dfrac{25}{4}$, $t=\dfrac{21}{4}$

$\therefore\ a=\dfrac{21}{4}$

11. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 방정식의 해의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=120$$

이다.

한편, (나) 조건을 만족시키지 않는 경우는

$x=y=z$인 경우이므로

조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$3x+w=7$

인 경우이다. 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, w의 순서쌍은

$(0, 7), (1, 4), (2, 1)$

이므로 조건 (가)를 만족시키면서 조건 (나)를 만족시키지 않는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 3이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$120-3=117$

12. [출제 의도] 로그의 정의와 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\log_2 x=\dfrac{2}{3}$, $\log_5 y=\dfrac{1}{4}$에서

$x=2^{\frac{2}{3}}$, $y=5^{\frac{1}{4}}$

$m\log x+n\log y=\log x^m y^n$

이고 $x^m y^n=2^{\frac{2m}{3}}\times 5^{\frac{n}{4}}$이므로 $m\log x+n\log y$가 자연수가 되려면 $2^{\frac{2m}{3}}\times 5^{\frac{n}{4}}$의 값이 10의 거듭제곱수여야 한다.

$2^{\frac{2m}{3}}$이 자연수가 되려면 m은 3의 배수여야 하고, $5^{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되려면 n은 4의 배수여야 한다.

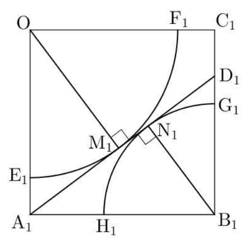
또한 m이 3의 배수일 때 $\dfrac{2m}{3}$은 짝수이므로

$2^{\frac{2m}{3}}\times 5^{\frac{n}{4}}$의 값이 10의 거듭제곱수가 되는 자연수 m, n의 최솟값은 각각 $m=3$, $n=8$이다.

따라서 $m+n$의 최솟값은 11이다.

13. [출제 의도] 도형의 성질을 활용하여 등비급수의 합을 계산할 수 있는가?

그림과 같이 그림 R_1에서 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 호 $\mathrm{G_1H_1}$이 선분 $\mathrm{A_1D_1}$과 각각 만나는 점을 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{N_1}$이라 하자.



문제의 조건에서

$\overline{\mathrm{B_1C_1}}:\overline{\mathrm{B_1D_1}}=4:3$이고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}$이므로

$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1D_1} = 4:3$이고,
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1D_1} : \overline{A_1D_1} = 4:3:5$이다.

$\angle D_1A_1B_1$이 공통각이므로

$$\triangle A_1B_1D_1 \backsim \triangle A_1N_1B_1 \text{ (AA 닮음)}$$

에서
$\overline{A_1B_1} : \overline{B_1N_1} = \overline{A_1D_1} : \overline{B_1D_1} = 5:3$
이고 $\overline{A_1B_1} = 2$이므로

$$\overline{B_1N_1} = \frac{3}{5}\overline{A_1B_1} = \frac{6}{5}$$

이다.
같은 방법으로 $\angle D_1A_1B_1 = \angle M_1OA_1$이므로

$$\triangle A_1B_1D_1 \backsim \triangle OM_1A_1 \text{ (AA 닮음)}$$

이고,

$$\overline{OM_1} = \frac{4}{5}\overline{OA_1} = \frac{8}{5}$$

이다.

따라서 부채꼴 OE_1F_1의 넓이는

$$\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\overline{OM_1}\right)^2 = \frac{16}{25}\pi$$

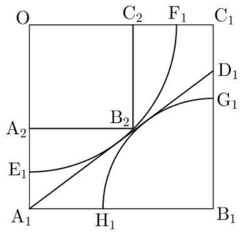
부채꼴 $B_1G_1H_1$의 넓이는

$$\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\overline{B_1N_1}\right)^2 = \frac{9}{25}\pi$$

이므로

$$S_1 = 4 - \frac{16}{25}\pi - \frac{9}{25}\pi = 4-\pi \ \cdots \ (*)$$

이다.
한편, 그림 R_2에서



$\overline{OB_2} = \overline{OM_1} = \frac{8}{5}$이므로

$$\overline{OA_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OB_2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

이다. 따라서 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 (*)과 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{4-\pi}{1-\frac{8}{25}} = \frac{25}{17}(4-\pi)$$

14. [출제 의도] 수학적 귀납법을 이용한 명제의 증명 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= (2m+1)! - (m+2)! + 1 \\ &\quad + \{4(m+1)^2 + 2(m+1) - 1\} \\ &\qquad \times \{2(m+1)-1\}! \\ &\quad - \{(m+1)+1\}^2 \times (m+1)! \\ &= (2m+1)! - (m+2)! + 1 \\ &\quad + (4m^2+10m+5)\times(2m+1)! \\ &\quad - (m+2)^2\times(m+1)!\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(m) = 4m^2 + 10m + 5$

(나): (ii)의 계산 과정에서

$$\begin{aligned}&(2m+1)! - (m+2)! + 1 \\ &\quad + (4m^2+10m+5)\times(2m+1)! \\ &\quad - (m+2)^2\times(m+1)! \\ &= (4m^2+10m+6)\times(2m+1)! \\ &\quad - (m+2)! - (m+2)\times(m+2)! + 1 \\ &= (2m+2)(2m+3)\times(2m+1)! \\ &\quad - (m+3)\times(m+2)! + 1 \\ &= (2m+3)! - (m+3)! + 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(m) = m+3$

$$\therefore \ \frac{f(5)}{g(2)} = \frac{4\cdot5^2 + 10\cdot5 + 5}{2+3} = 31$$

15. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

임의의 실수 x에 대하여 $|f(x) - x| \ge 0$이므로
임의의 양수 x에 대하여

$$\int_0^x |f(t) - t|\,dt \ge 0$$

이다. 따라서 조건 (나)에서 임의의 양수 x에 대하여

$$\int_0^x |f(t) - t|\,dt = 0$$

이고, $f(x) - x = 0\ (x>0)$이다.

$\therefore\ f(x) = x\ \ (x>0)$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} (ax+b)e^{-x} & (x \le 0) \\ x & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
$\Rightarrow\ (a\cdot 0 + b)e^{-0} = 0,\ b=0$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0-}\frac{axe^{-x}}{x} = 1,\ a=1$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & (x\le 0) \\ x & (x>0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_{-1}^{2} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} xe^{-x}dx + \int_0^2 x\,dx \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} + 2 \\ &= -1+2 = 1\end{aligned}$$

16. [출제 의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

여학생 2명과 교사 2명을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(4-1)! = 6$이고,
남학생 3명을 위에서 배열된 여학생 2명과 교사 2명 사이에 배열하는 방법의 수는

$${}_4P_3 = 24$$

따라서 남학생 3명이 서로 이웃하지 않도록 원탁에 앉는 방법의 수는

$$6\times 24 = 144\ \cdots\ ①$$

교사 2명이 서로 이웃하도록 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$2\times(6-1)! = 240\ \cdots\ ②$$

교사 2명이 서로 이웃하도록 교사 2명과 여학생 2명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$2\times(3-1)! = 4$$

남학생 3명을 위에서 배열된 여학생 2명과 교사 2명 사이에 배열하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 남학생 3명이 서로 이웃하지 않고, 교사 2명이 서로 이웃하도록 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$4\times 6 = 24\ \cdots\ ③$$

①, ②, ③에서 문제의 조건을 만족하도록 7명이 원탁에 앉는 방법의 수는

$$144 + 240 - 24 = 360$$

17. [출제 의도] 지수함수와 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

$2^x = t$라 하면 $t>0$이고, 함수

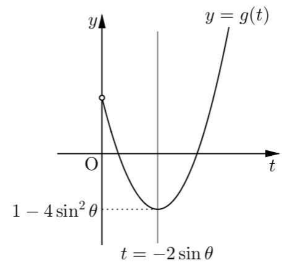
$$g(t) = t^2 + (4\sin\theta)t + 1\ (t>0)$$

의 치역은 함수 $f(x)$의 치역과 같다.

$g(t) = (t + 2\sin\theta)^2 + 1 - 4\sin^2\theta$
에서 함수 $g(t)$는 직선 $t = -2\sin\theta$에 대하여 대칭이고 함수 $g(t)$의 정의역은 $t>0$이므로
함수 $g(t)$가 0 이하의 최솟값을 가지려면

$$-2\sin\theta > 0,\ 1 - 4\sin^2\theta \le 0$$

이어야 한다.



$-2\sin\theta > 0$
$\Leftrightarrow\ \sin\theta < 0,\ \pi < \theta < 2\pi\ \cdots\ ①$
이고,

$1 - 4\sin^2\theta \le 0$

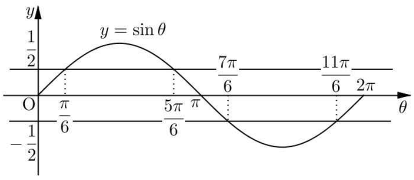
$\Leftrightarrow\ \sin^2\theta - \frac{1}{4} \ge 0$

$\Leftrightarrow\ \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow\ \sin\theta \le -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta \ge \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$ 또는 $\frac{7\pi}{6} \le \theta \le \frac{11\pi}{6}\ \cdots\ ②$

이므로



①, ②에서
문제의 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위는
$\frac{7\pi}{6} \le \theta \le \frac{11\pi}{6}$ 이다.

$\therefore\ 2M-m = \frac{11\pi}{6}\times 2 - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$

18. [출제 의도] 정규분포곡선의 성질을 이해하고 있는가?

(ㄱ) 문제에서 주어진 표에서
$f(12) < f(4) < f(8)$ 이다. 정규분포곡선의 성질에서 x의 값이 m 에 가까워질수록 $f(x)$의 값이 크므로

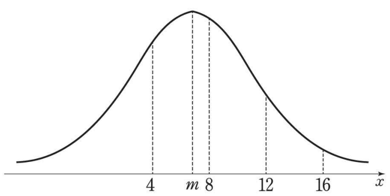
$$|m-12| > |m-4| > |m-8|$$

이다.

$|m-12| > |m-4|$ 에서 $m < \frac{12+4}{2} = 8$

$|m-4| > |m-8|$ 에서 $m > \frac{4+8}{2} = 6$

이므로 $6 < m < 8$ 이고, m 은 자연수이므로
$m = 7$이다. (참)



(ㄴ) ㄱ에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 직선 $x=7$에 대하여 대칭이다. 따라서
$f(4) = f(10) = 0.0753$, $f(12) = 0.0457$
$g(4) = g(10) = 0.0666$, $g(12) = 0.0484$
에서 $g(10) < f(10)$, $g(12) > f(12)$ 이므로
사잇값 정리에 의하여 $f(k) = g(k)$ 를 만족시키는 k가 열린구간 $(10,\ 12)$ 에 존재한다. (참)

(ㄷ) ㄴ에서 $f(m) > g(m)$ 임을 알 수 있고,
정규분포곡선의 성질에 따라 $\sigma_1 < \sigma_2$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

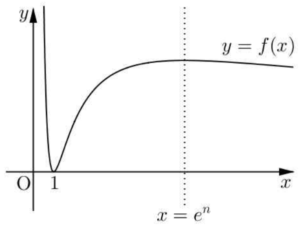
19. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 그래프를 그리고, 문제를 해결할 수 있는가?

$f'(x) = \frac{(\ln x)^{n-1}(n-\ln x)}{x^2}$

이므로 n 이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 생각한다.

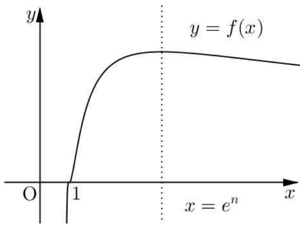
(1) n 이 짝수인 경우
함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=e^n$ 에서 각각 극솟값, 극댓값을 가진다.

또한, $\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^n}{x} = \infty$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(2) n 이 홀수인 경우
함수 $f(x)$는 $x=e^n$ 에서만 극댓값을 가진다.

또한, $\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^n}{x} = -\infty$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(1), (2) 모두 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=e$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx = \left[\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e = \frac{1}{n+1}$$

이므로 조건 (가)에서

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{12} \Rightarrow n < 11 \ \cdots \ ①$$

조건 (나)에서 직선 $y=f(e^4)$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 개수가 2 이어야 한다.

(1)의 경우, $\lim_{x\to\infty}f(x) = 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 $k=f(e^n)$ 이어야 한다.
따라서 $n=4$ 이다. ⋯ ②

(2)의 경우, $\lim_{x\to\infty}f(x) = 0$ 이고, $f(e^n) > f(e^4)$ 이므로 모든 홀수 n 에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(e^4)$이 만나는 점의 개수가 2 이다. ⋯ ③

①, ②, ③에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$4+(1+3+5+7+9) = 29$$

20. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

조건 (나)를 만족시키는 경우는
$f(1)=1,\ f(2)=2$ 이거나
$f(1)=2,\ f(2)=1$ 인 경우뿐이다.

두 가지 경우 모두 조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$${}_6\mathrm{H}_2 \times {}_5\mathrm{H}_2 = {}_7\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 315$$

이므로 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

$$2\times 315 = 630 \ \cdots \ ①$$

문제의 조건을 만족시키면서 $f(3) < f(4)$ 인 함수 f 의 개수를 구하기 위해서 다음과 같은 두 가지 경우를 생각한다.

(1) $f(1)=1$ 인 경우
$f(2)=2$이고 $f(3) < f(4)$ 이므로 문제의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는
$f(3)=1$ 이면 $f(4) > 1,\ f(5) \ge 1,\ f(6) > 1$
이므로 $6\times {}_5\mathrm{H}_2 = 90$
같은 방법으로
$f(3)=2$이면 $5\times {}_4\mathrm{H}_2 = 50$
$f(3)=3$이면 $4\times {}_3\mathrm{H}_2 = 24$
$f(3)=4$이면 $3\times {}_2\mathrm{H}_2 = 9$
$f(3)=5$이면 $2\times {}_1\mathrm{H}_2 = 2$
따라서 $f(1)=1$인 경우 문제의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$90+50+24+9+2 = 175$$

(2) $f(1)=2$인 경우
$f(2)=1$이고, $f(3) < f(4)$이므로 문제의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$f(3)=2$이면 $f(4) > 2,\ f(5) \ge 2,\ f(6) > 2$
이므로 $5\times {}_4\mathrm{H}_2 = 50$
비슷한 방법으로 $f(3) \ge 3$ 인 경우에도 (1)과 경우의 수가 같다.
따라서 $f(1)=2$인 경우 문제의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$$50+24+9+2 = 85$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키면서 $f(3) < f(4)$인 모든 함수 f의 개수는

$$175+85 = 260 \ \cdots \ ②$$

①, ②로부터 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{260}{630} = \frac{26}{63}$$

(다른 풀이)
문제의 조건에서 $f(1) \le f(3) \le f(5)$,
$f(2) \le f(4) \le f(6)$ 이고,
$f(1)=1,\ f(2)=2$ 또는
$f(1)=2,\ f(2)=1$이므로
문제의 조건을 만족시키는 함수 f 에 대하여
순서쌍 $(f(1), f(3), f(5))$의 집합과
순서쌍 $(f(2), f(4), f(6))$ 의 집합이 서로 같다.
즉, $f(3) > f(4)$를 만족시키는 어떤 두 순서쌍
$(f(1), f(3), f(5)) = (a, b, c)$
$(f(2), f(4), f(6)) = (p, q, r)$
에 대하여
$(f(1), f(3), f(5)) = (p, q, r)$,
$(f(2), f(4), f(6)) = (a, b, c)$
인 순서쌍 또한 문제의 조건 (가), (나)를 만족시키고, 이 경우 $f(3) > f(4)$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 함수 f 중에서
$f(3) > f(4)$인 함수 f 의 개수와
$f(3) < f(4)$인 함수 f의 개수는 서로 같다. ⋯ (*)

문제의 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

$$2\times 315 = 630 \ \cdots \ ①$$

문제의 두 조건을 만족시키면서 $f(3) = f(4)$ 인 함수 f에 대하여

$f(1)$, $f(2)$을 정하는 방법의 수는 2,
$f(3)=f(4)\geq 2$이므로
$f(3)$, $f(4)$의 값에 따라 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는

$$5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=55$$

이므로 문제의 두 조건을 만족시키면서
$f(3)=f(4)$인 함수 f의 개수는

$$2\times 55=110 \cdots ②$$

따라서 ①, ②에서 문제의 조건을 만족시키면서
$f(3)<f(4)$인 함수 f의 개수는

$$\frac{1}{2}\times(630-110)=260$$

따라서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{260}{630}=\frac{26}{63}$$

21. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항과 그 합을 구할 수 있는가?

문제에서 주어진 두 등식을 변변 더하면

$$a_{2n}+a_{2n+1}=a_n-n$$

양변에 $n=1$부터 $n=l$ (l은 자연수)까지의 자연수를 각각 대입하면

$a_2+a_3=a_1-1$

$a_4+a_5=a_2-2$

$a_6+a_7=a_3-3$

$\cdots$

$a_{2l}+a_{2l+1}=a_l-l$

위 등식들을 변변 더하면

$a_2+a_3+\cdots+a_{2l}+a_{2l+1}$
$=a_1+a_2+\cdots+a_l-(1+2+\cdots+l)$
$=\sum_{k=1}^{l}a_k-\frac{l(l+1)}{2}$

$a_1=a$이고 $a_{2l+1}=-\frac{l}{2}$이므로

$a_2+a_3+\cdots+a_{2l+1}$
$=\sum_{k=1}^{2l}a_k-a_1+a_{2l+1}=\sum_{k=1}^{2l}a_k-a-\frac{l}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{2l}a_k-a-\frac{l}{2}=\sum_{k=1}^{l}a_k-\frac{l(l+1)}{2}$

$\Rightarrow\ S_{2l}-S_l=a+\frac{l}{2}-\frac{l(l+1)}{2}=a-\frac{l^2}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{m}(S_{2k}-S_k)$
$=\sum_{k=1}^{m}\left(a-\frac{k^2}{2}\right)=am-\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}$

이고,

$\sum_{k=1}^{m}S_{2k}<\sum_{k=1}^{m}S_k$

$\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{m}(S_{2k}-S_k)<0$

$\Leftrightarrow\ am-\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}<0$

$\Leftrightarrow\ a-\frac{(m+1)(2m+1)}{12}<0$

$\Leftrightarrow\ (m+1)(2m+1)>12a$

이다.

$g(m)=(m+1)(2m+1)$이라 하면
문제의 조건에서
$g(9)\leq 12a$이고 $g(10)>12a$이어야 한다. 즉,

$g(9)=10\times 19=190$,
$g(10)=11\times 21=231$
이므로 $190\leq 12a<231$이다.

이를 만족시키는 자연수 a의 값은

16, 17, 18, 19

이고, 그 합은

$$16+17+18+19=70$$

이다.

22. [출제 의도] 이항분포의 뜻을 알고 있는가?

$\mathrm{P}(X=0)={}_{36}\mathrm{C}_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{36}$

$\mathrm{P}(X=1)={}_{36}\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{35}$

이므로

$$\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=0)}=\frac{{}_{36}\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{35}}{{}_{36}\mathrm{C}_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{36}}=\frac{36\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=12$$

23. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

탄젠트함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$

$\Rightarrow\ \frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=2$

$\Rightarrow\ 2(\tan\alpha+1)=\tan\alpha-1,\ \tan\alpha=-3$

$\therefore\ \sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+(-3)^2=10$

24. [출제 의도] 지수함수의 성질을 이해하고 있는가?

닫힌구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=2$에서 각각 최댓값 또는 최솟값을 가진다.

문제의 조건에서 $f(-1)+f(2)=9$이므로
$(a^{-3}+2)+(a^0+2)=9\ \Rightarrow\ a^{-3}=4$

따라서 $f(-4)=a^{-6}+2$
$=(a^{-3})^2+2=18$

25. [출제 의도] 등비수열을 포함한 함수의 극한을 계산할 수 있는가?

x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(1) $|x|<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}=\frac{x^2+4x}{x+1}$

이고 주어진 방정식은

$\frac{x^2+4x}{x+1}=3x-2$

$\Rightarrow\ x^2+4x=3x^2+x-2$

$\Rightarrow\ 2x^2-3x-2=0,\ (2x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}\ (\because\ |x|<1)$

(2) $|x|>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{4}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}=x^2$

이므로 주어진 방정식은

$x^2=3x-2$

$\Rightarrow\ x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ |x|>1)$

(3) $x=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}+x^2+4x}{x^n+x+1}=\frac{1+1+4}{1+1+1}=2$,

$3x-2=3\times 1-2=1$

이므로 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

(1)~(3)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 30k=30\times\frac{3}{2}=45$

26. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이므로

$a_{n+1}>a_n\geq 0$이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=d$

$a_n<a_{n+1}\leq 0$이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=-d$

$a_n<0<a_{n+1}$이면 $-d<|a_{n+1}|-|a_n|<d$

이다.

따라서 조건 (가)로부터 $d=3$이다.

조건 (나)로부터

$a_5<0<a_6$이고, $|a_6|-|a_5|=a_6+a_5=1$

이다.

$a_6=a_5+3$이므로 $a_5=-1$, $a_6=2$이다.

즉, $a_1=-13$이고 $d=3$이므로

$\therefore\ a_n=3n-16$,

$$b_n=\begin{cases}-3 & (1\leq n<5)\\ 1 & (n=5)\\ 3 & (n>5)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{9}a_kb_k&=-3(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5\times 1\\&\quad+3(a_6+a_7+a_8+a_9)\\&=3(a_6-a_1)+3(a_7-a_2)+3(a_8-a_3)\\&\quad+3(a_9-a_4)+(-1)\\&=3\times 4\times 5d-1=179\end{aligned}$$

(Tip1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

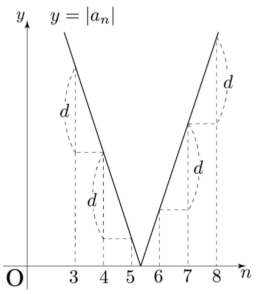
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

이다. 이를 n에 대하여 정리하면

$$a_n=dn+(a_1-d)$$

이므로, 등차수열의 각 항의 값은 기울기가 d인 직선 위의 점으로 표현할 수 있다.

이를 통해 $y=|a_n|$ 그래프를 ny평면에 그리면 다음과 같다.



그림을 통해 대부분은 $|a_{n+1}|-|a_n|$의 값이 '공차' 또는 '$-$공차'의 값을 가짐을 알 수 있고, 문제의 조건으로부터 공차는 3임을 알 수 있다.

한편 $b_5=1$이므로 a_5와 a_6의 값은 $y=|a_n|$ 그래프의 x절편을 기준으로 서로 반대편에 존재해야 함을 알 수 있다.

따라서 $a_5<0<a_6$ 이므로
$|a_6|-|a_5|=a_6-(-a_5)=1,\ a_6-a_5=3$ 에서
$a_5=-1,\ a_6=2$임을 알 수 있다.

(Tip2)
$a_6-a_1=a_7-a_2=a_8-a_3=a_9-a_4=5d$

27. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는가?

$g'(x)=f'(x)\left(e^{f(x)}-1\right)$이고, $e^{f(x)}-1$의 부호와 $f(x)$의 부호가 항상 같으므로
$g'(x)$의 부호는 $f'(x)f(x)$의 부호와 같다.

$f'(x)$의 부호가 변하는 x에서 $f(x)$가 극값을 가지므로 그 x의 값의 근방에서는 $f(x)$의 부호가 변하지 않는다.

따라서 $f(x)$와 $f'(x)$의 부호가 모두 변하는 x는 존재하지 않고, 함수 $g(x)$가 극값을 가지는 점의 개수는
$f(x)$가 극값을 갖는 점의 개수와
$f(x)$의 부호가 변하는 점의 개수의 합과 같다.

따라서 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 부호가 변하는 점의 개수는 0임을 알 수 있다.

또한, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)\geq 0$이다.

조건 (나)에서 $f(\alpha)=f(\beta)=0$이고, $x=\alpha$와 $x=\beta$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 변하지 않으므로

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

이다.

$f'(x)=4(x-\alpha)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)(x-\beta)$에서

함수 $f(x)$는 $x=\alpha,\ x=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ x=\beta$에서

극값을 가지고 각각의 값은 $0,\ \left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^4,\ 0$이다.

따라서 $\beta-\alpha=4$이므로 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^4=2^4=16$$

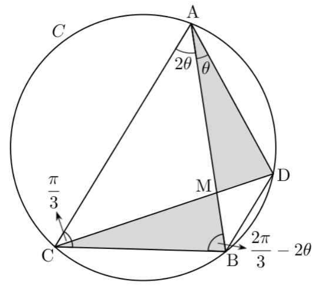
28. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

원주각의 성질에서 $\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BAD}=\theta$이고,
사인법칙에서

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ACB})}=2\ \Rightarrow\ \sin(\angle\mathrm{ACB})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이고, $\angle\mathrm{ACB}<\angle\mathrm{ADB},\ \angle\mathrm{ACB}+\angle\mathrm{ADB}=\pi$

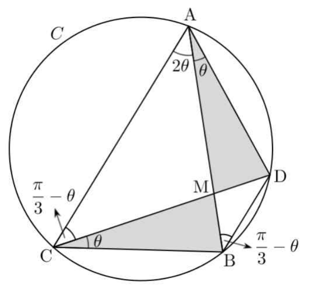
이므로 $\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{ADB}=\dfrac{2\pi}{3}$이다.



$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{2\pi}{3}-2\theta$이므로 삼각형 ABC에서
사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\sin(\angle\mathrm{ABC})=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)$$

이고,



$$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ACB}-\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{3}-\theta$$

이고 원주각의 성질에서

$$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}=\frac{\pi}{3}-\theta$$

이므로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AD}}=2\sin(\angle\mathrm{ABD})=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ACD}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin(\angle\mathrm{CAD})\\&=\frac{1}{2}\times2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\times\sin3\theta\\&=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin3\theta\end{aligned}$$

$\cdots$ ①

이고,

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin(\angle\mathrm{CAB})\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times\sin2\theta\\&=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\sin2\theta\end{aligned}$$

$\cdots$ ②

$\angle\mathrm{AMC}=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$이므로 삼각형 AMC에서

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\sin(\angle\mathrm{CAM})}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{AMC})}$$

$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{CM}}=\frac{2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-2\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}\times\sin2\theta\qquad\cdots ③$$

①, ②에서

$$\begin{aligned}&f(\theta)-g(\theta)\\&=\triangle\mathrm{ACD}-\triangle\mathrm{ABC}\\&=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\times\left\{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin3\theta-\sqrt{3}\sin2\theta\right\}\end{aligned}$$

이므로 ③에서

$$\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}}=\frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\sin3\theta-\sqrt{3}\sin2\theta}{\dfrac{2\sin2\theta}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)\times\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$$

이다.

$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}=\frac{3}{2}$이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\overline{\mathrm{CM}}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3}{8}$$

$\therefore\ 80k=30$

29. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

별 무늬의 공이 2개 이상 들어간 상자를 정하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_1=4$$

이다. 이때 조건 (가)를 만족시키는 경우를 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(1) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우

(i) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공이 2개 들어간 경우, 별 무늬의 검은 공은 별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 상자에 들어가야 하므로 별 무늬의 검은 공을 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1=3$$

남은 흰 공 1개와 검은 공 2개를 상자 4개에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2=40$$

이렇게 공을 나누어 넣는 경우, 항상 조건 (나)를 만족시키므로 (별 무늬의 흰 공이 2개 들어가는 상자가 있다.) 이 경우 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=120$$

(ii) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 들어간 경우,
상자에 들어가지 않은 별 무늬의 흰 공은 위의 상자와 다른 상자에 들어가야 한다.
(i)과 같은 방법으로 남은 별 무늬의 흰 공 하나와 흰 공 1개, 검은 공 2개를 상자에 나누어 담는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1 \times {}_4\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 120$$

이때, 조건 (나)를 만족시키기 위하여 위에서 구한 모든 경우에서 각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로 들어가는 경우를 제외해야 한다.

각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로 들어가는 경우의 수는

나머지 3개의 상자 중에서 별 무늬의 흰 공이 들어가는 방법의 수가 3,

별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 두 상자에 흰 공이 들어가는 경우의 수가 2,

검은 색 공이 3개의 상자에 각각 하나씩 들어가는 경우의 수가 ${}_3\mathrm{C}_2$ 이므로

$$3 \times 2 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 18$$

이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120 - 18 = 102$$

(i), (ii)에서 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우, 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120 + 102 = 222$$

(2) 별 무늬의 공이 3개 들어간 상자가 있는 경우

이 경우 조건 (나)를 항상 만족시키고, 남은 흰 공 1개와 검은 공 2개만 상자 4개에 나누어 담으면 된다. (1)과 같은 방법으로 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1 \times {}_4\mathrm{H}_2 = 40$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$4 \times (222 + 40) = 4 \times 262 = p$$

이므로 $\dfrac{p}{4} = 262$ 이다.

30. [출제 의도] 역함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a+2) + 2}{g(x) - g(a)}$ 의 값이 존재하고 $x \to a$ 일 때 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이다.

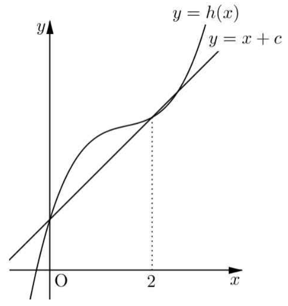
함수 $f(x)$는 다항함수(연속함수)이므로

$$f(a) = f(a+2) - 2$$

$h(x) = f(x+a)$ 라 하면 위 등식에서

$$h(0) = h(2) - 2 \ \Rightarrow\ \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = 1$$

이므로 기울기가 1이고, 점 $(0,\, h(0))$ 을 지나는 직선($y = x + h(0)$)은 곡선 $y = h(x)$와 두 점 $(0,\, h(0))$, $(2,\, h(2))$ 에서 만난다.



$h(0) = c$ 라 하면 인수정리에서

$h(x) - (x + c) = x(x-2)(x-\alpha)$ (α는 실수)이고,

$h(x) = x(x-2)(x-\alpha) + x + c$,

$h'(x) = 3x^2 - 2(\alpha+2)x + 2\alpha + 1$

이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 가지고,

$$h(x) = f(x+a)$$

이므로 함수 $h(x)$도 역함수를 갖는다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $h(x)$가 역함수를 가지기 위해서는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) \geq 0$ 이므로 이차방정식 $h'(x) = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D \leq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (\alpha+2)^2 - 3(2\alpha+1)$$
$$= (\alpha - 1)^2 \leq 0$$

에서 $\alpha = 1$ 임을 알 수 있다.

$$\therefore\ h(x) = x(x-1)(x-2) + x + c$$
$$= x^3 - 3x^2 + 3x + c$$
$$= (x-1)^3 + c + 1$$

따라서 $f(x) = h(x-a)$

$$= (x - a - 1)^3 + c + 1$$

한편 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = a + 1$ 뿐이므로

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a+2) + 2}{g(x) - g(a)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = 1$$

이고, $f'(a) = g'(a)$이다.

$f'(x) = 3(x - a - 1)^2$ 에서 $f'(a) = 3$ 이므로 $f'(a) = g'(a) = 3$이다.

방정식 $f(x) = a$ 의 실근을 $x = t$ 라 하면 역함수의 미분법에서

$$g'(a) = \frac{1}{f'(t)} = 3$$

이므로 $f'(t) = \dfrac{1}{3}$ 이다. 즉,

$$3(t - a - 1)^2 = \frac{1}{3}$$

이므로 $t = a + \dfrac{2}{3}$ 또는 $t = a + \dfrac{4}{3}$ 이다.

$$f\left(a + \frac{2}{3}\right) = c + \frac{26}{27},\ f\left(a + \frac{4}{3}\right) = c + \frac{28}{27}$$

이므로

$a = c + \dfrac{26}{27}$ 또는 $a = c + \dfrac{28}{27}$ 이고, $f(a) = c$ 이므로

$a - f(a) = \dfrac{26}{27}$ 또는 $a - f(a) = \dfrac{28}{27}$

$$\therefore\ |M - m| = \frac{2}{27},\ p + q = 29$$

(Tip) 역함수를 갖는 최고차항의 계수가 1인 임의의 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f'(x) = 3(x - \alpha)^2 + \beta\ (\beta \geq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때

$$f(x) = (x - \alpha)^3 + \beta(x - \alpha) + \gamma$$

의 꼴로 나타낼 수 있고, 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-\alpha$ 만큼, y축의 방향으로 $-\gamma$ 만큼 평행이동하면

$$y = x^3 + \beta x\ (x \geq 0)$$

이다.

따라서 역함수를 갖는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수는 적당히 평행이동하여

$$y = x^3 + kx\ (k \geq 0)$$

의 그래프와 일치하게 할 수 있다.

이를 이용하여 문제에서 함수 $f(x)$의 그래프를 적당히 평행이동하여 함수

$$h(x) = x^3 + kx\ (k \geq 0)$$

의 그래프를 얻었다고 가정하자. 그러면

$h(x+2) - h(x) = 2$

$\Leftrightarrow\ 3x^2 + 6x + k + 3 = 0$

이고, 위 방정식의 실근이 존재해야 하므로

$\dfrac{D}{4} = 9 - 3(k+3) \geq 0\ \Rightarrow\ k \leq 0$

이때 $k \geq 0$ 이므로 $k = 0$ 이고, $x = -1$ 이다.

문제의 조건에서

$$f(a+2) - f(a) = 2$$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 함수 $h(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $a + 1$만큼, y축의 방향으로 c만큼 (c는 실수) 평행이동한 것이다.

따라서

$$f(x) = (x - a - 1)^3 + c$$

와 같이 표현할 수 있다.

2021학년도 대학수학능력시험 대비
기대X녹색지대 모의고사 해설지

수학 영역(나 형)

정 답

1	③	2	⑤	3	②	4	①	5	③
6	④	7	①	8	⑤	9	②	10	④
11	①	12	③	13	④	14	②	15	③
16	⑤	17	①	18	④	19	②	20	③
21	①	22	189	23	12	24	16	25	13
26	25	27	360	28	179	29	262	30	96

출제자

이재종 (성균관대 수학교육과)

- 국가장학재단 이공계장학금 전액 장학생
- 2013년 네이버 파워지식in
- 녹색지대 모의고사 2020 출제 및 제작

김기대 (고려대학교 수학과)

- 2015년~2020년 기대모의고사 저자
- 고려대, 서강대 등 수리논술 5회 합격 (All 수학과)
- 대학생/강사신분 현장응시한 수능(평가원) All 100(5회)

수능표본 예상 등급컷 (나형)

1등급컷 : 84

2등급컷 : 76

3등급컷 : 64

주의사항

2. 수능직전모의고사 성격에 알맞게, 기대모의고사 출판본에 비해 발상의 참신함은 덜하고 좀 더 담백하게 제작된 모의고사입니다.

3. 오타나 오류제보는 kidae6150@naver.com 으로 메일 바랍니다.

해 설

1. [출제 의도] 지수법칙을 이해하고 있는가?

$$(2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{3\times\frac{2}{3}} = 2$$

2. [출제 의도] 다항함수의 도함수를 구할 수 있는가?

$f(x) = x^3 + 2x$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $f'(1) = 5$ 이다.

3. [출제 의도] 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있는가?

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

문제의 조건에서

$$\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

4. [출제 의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$$

5. [출제 의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 수학적 확률을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)$

따라서 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$ 이다.

또한

$$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} + \mathrm{P}(B) = \frac{5}{6}$$

에서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B^C) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B^C) - \mathrm{P}(A\cap B^C)\\ &= \mathrm{P}(A) + \{1-\mathrm{P}(B)\} - \mathrm{P}(A)\\ &= 1-\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. [출제 의도] 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

$f'(x) = 4x^3 - 2x$ 에서

$f(x) = x^4 - x^2 + C$ (C는 적분상수)

$f(-1) = 2$ 이므로

$1 - 1 + C = 2 \Rightarrow C = 2$

$\therefore f(2) = 2^4 - 2^2 + 2 = 14$

7. [출제 의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum_{n=1}^{10}(a_n + b_n) = 20$ 에서

$\sum_{n=1}^{10}(3a_n + 3b_n) = 60$

이고

$\sum_{n=1}^{10}(2a_n - 3b_n) = 30$

이므로 위 두 등식을 변변 더하면

$\sum_{n=1}^{10}5a_n = 90 \quad \therefore \sum_{n=1}^{10}a_n = 18$

8. [출제 의도] 지수함수의 성질을 이해하고 있는가?

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=2$ 에서 각각 최댓값 또는 최솟값을 가진다.

문제의 조건에서 $f(-1) + f(2) = 9$ 이므로

$(a^{-3}+2) + (a^0+2) = 9 \Rightarrow a^{-3} = 4$

따라서 $f(-4) = a^{-6} + 2$

$= (a^{-3})^2 + 2 = 18$

9. [출제 의도] 함수의 극한의 정의를 이해하고 있는가?

주어진 그래프로부터

$\lim_{x\to a}f(x) = 2$ 인 a가 열린구간 $(0, 1)$에 하나 존재하고, $\lim_{x\to 3}f(x) = 2$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는 2이다.

10. [출제 의도] 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 주사위의 눈의 합이 7인 경우는 세 눈의 수가 각각

$(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$ 인 경우뿐이다.

세 눈의 수가 $(1, 1, 5)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 3)$ 일 확률은 각각

$${}_3\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

이고, 세 눈의 수가 $(1, 2, 4)$ 일 확률은

$$3!\times\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{72}\times 3 + \frac{1}{36} = \frac{5}{72}$$

11. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 계산할 수 있는가?

주어진 수열의 귀납적 정의에 의하여

$a_1 = 2$,

$a_2 = |2a_1 - 7| = 3$

$a_3 = |2a_2 - 7| = 1$

$a_4 = |2a_3 - 7| = 5$

$a_5 = |2a_4 - 7| = 3$

$\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 3, 1, 5가 반복된다.

$a_{20} = a_{17} = a_{14} = \cdots = a_2 = 3$

이므로

$\therefore \sum_{n=1}^{20}a_n = 2 + 6\times(3+1+5) + 3 = 59$

12. [출제 의도] 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

임의추출한 64개의 표본을 이용하여 구한 표본평균을 $\overline{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도

95%의 신뢰구간을 구하면

$\bar{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le \bar{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$

이므로

$2\times 1.96\times\dfrac{\sigma}{8}=13.225-10.775=2.45$

$\Rightarrow\ 0.49\sigma=2.45$

$\therefore\ \sigma=5$

13. [출제 의도] 실수의 거듭제곱근 중 실수인 것을 구할 수 있는가?

자연수 $n\ (n\ge 2)$에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 아래 표와 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

따라서 $f(n)=0$인 경우는

(i) $n^2-9=0$ 이거나

(ii) $n^2-9>0$이고 $n+1$이 짝수인 경우이다.

(i) $n^2-9=0$인 경우는 $n=3$인 경우뿐이다.

(ii) $n^2-9>0$인 경우는 $n>3$인 경우이고, $n+1$이 짝수인 경우는 $n=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$ 인 경우이다.

따라서 $n=5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13$일 때 $f(n)=0$이다.

(i), (ii)에서

문제의 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$3+5+7+9+11+13=48$

14. [출제 의도] 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$v(t)>0\ \Leftrightarrow\ 1<t<a$에서

$1<t<a$에서 점 P가 양의 방향으로 움직인다.

$v(t)=-3t^2+3(a+1)t-3a$

에서

$\displaystyle\int_1^a v(t)dt$

$\displaystyle=\int_1^a\left(-3t^2+3(a+1)t-3a\right)dt$

$\displaystyle=\left[-t^3+\frac{3}{2}(a+1)t^2-3at\right]_1^a$

$\displaystyle=\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{(a-1)^3}{2}$

이고, 문제의 조건에서

$\dfrac{(a-1)^3}{2}=4\ \Rightarrow\ (a-1)^3=8\quad\therefore\ a=3$

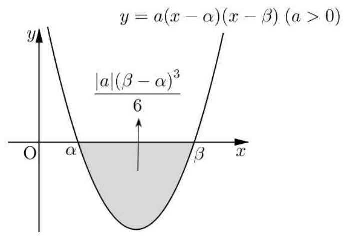
(Tip) $\alpha<\beta$일 때,

$\displaystyle\int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|dx=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$

이므로 문제의 조건에서

$\dfrac{|-3|(a-1)^3}{6}=4$

임을 알 수 있다.



15. [출제 의도] 경우의 수를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

$c-a\le 3$이므로 $c-a=2$인 경우와 $c-a=3$인 경우로 나누어 생각한다.

(1) $c-a=2$인 경우

$a,\ b,\ c$는 각각 연속한 세 자연수이므로

가능한 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 구하면

$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ \cdots,\ (6,\ 7,\ 8)$

이므로 이 경우 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 6이다.

(2) $c-a=3$인 경우

가능한 $a,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ c)$를 구하면

$(1,\ 4),\ (2,\ 5),\ \cdots,\ (5,\ 8)$

의 5개이고, 각 순서쌍마다 가능한 b의 개수는 2이므로 이 경우 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $5\times 2=10$이다.

(1), (2)에서 $c-a\le 3$인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$6+10=16$

한편, $c-a\le 3$이고 $b=3$인 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 구하면

$(1,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

이므로 $c-a\le 3$이고 $b=3$인 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 3이다.

따라서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{3}{16}$이다.

16. [출제 의도] 수학적 귀납법을 이용한 명제의 증명 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}a_k=(2m+1)!-(m+2)!+1$
$\quad+\{4(m+1)^2+2(m+1)-1\}$
$\quad\times\{2(m+1)-1\}!$
$\quad-\{(m+1)+1\}^2\times(m+1)!$
$=(2m+1)!-(m+2)!+1$
$\quad+(4m^2+10m+5)\times(2m+1)!$
$\quad-(m+2)^2\times(m+1)!$

$\Rightarrow f(m)=4m^2+10m+5$

(나): (ii)의 계산 과정에서

$(2m+1)!-(m+2)!+1$
$\quad+(4m^2+10m+5)\times(2m+1)!$
$\quad-(m+2)^2\times(m+1)!$
$=(4m^2+10m+6)\times(2m+1)!$
$\quad-(m+2)!-(m+2)\times(m+2)!+1$
$=(2m+2)(2m+3)\times(2m+1)!$
$\quad-(m+3)\times(m+2)!+1$
$=(2m+3)!-(m+3)!+1$

$\Rightarrow g(m)=m+3$

$\therefore\ \dfrac{f(5)}{g(2)}=\dfrac{4\cdot 5^2+10\cdot 5+5}{2+3}=31$

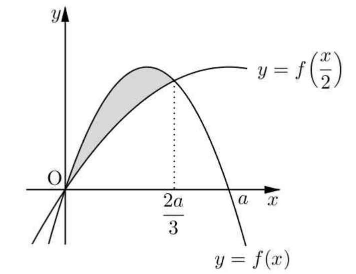
17. [출제 의도] 정적분을 활용하여 함수의 그래프로 둘러싸인 넓이를 구할 수 있는가?

$f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\ -x^2+ax=-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{a}{2}x$

$\Leftrightarrow\ x\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{a}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{2a}{3}$

문제의 상황을 그림으로 나타내면 그림과 같다.



그림에서 색칠한 부분의 넓이가 1이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{2a}{3}}\left\{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{2a}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{a}{2}x\right)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{4}x^3+\frac{a}{4}x^2\right]_0^{\frac{2a}{3}}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2a}{3}\right)^2\left(a-\frac{2a}{3}\right)$

$=\dfrac{a^3}{27}=1$

$\therefore\ a=3$

18. [출제 의도] 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

삼각형 ADE은 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{5}{2}$

이다. 따라서

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=2$이고, $\angle\mathrm{DBM}=60^\circ$이므로

삼각형 BDM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DM}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{BM}}\cdot\cos(\angle\mathrm{BDM})$

$\Rightarrow\ r^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2-2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 2\cdot\cos 60^\circ$

$=\dfrac{9}{4}+4-3=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

19. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수임을 알 수 있다.

n은 자연수이므로 조건 (나)에서 (분모)$\to 0$이고,
주어진 극한이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
$\therefore\ f(0)f'(0)=0$

따라서 다음과 같이 $f(0)=0$ 인 경우와 $f'(0)=0$ 인 경우로 나누어 생각한다.

(1) $f(0)=0$ 인 경우
$f(x)=x^2+ax$ (a는 실수)라 하면
$f'(x)=2x+a$ 이다.

(i) $a=0$ 인 경우

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times 2x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^n}=2$$

이므로 $n=3$ 이다.
$\therefore\ f(n)=f(3)=9$

(ii) $a\neq 0$ 인 경우

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+ax)\times(2x+a)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+a)(2x+a)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{x^n}=2$$

따라서 $n=1$ 이고, $a^2=2$ 이다.

$a=\sqrt{2}$ 인 경우, $f(n)=f(1)=1+\sqrt{2}$
$a=-\sqrt{2}$ 인 경우, $f(n)=f(1)=1-\sqrt{2}$
이다.

(2) $f'(0)=0$ 인 경우
$f(x)=x^2+b$ (b는 실수)라 하면
$f'(x)=2x$ 이다.
이때 $b=0$ 인 경우는 (1)의 (i)의 경우와 같다.

$b\neq 0$ 인 경우,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+b)\times 2x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2bx}{x^n}=2$$

이므로 $n=1$이고, $b=1$이다.
$\therefore\ f(n)=f(1)=2$

(1), (2)에서 $f(n)$ 의 최댓값은 9, 최솟값은 $1-\sqrt{2}$ 이고, 그 합은

$$9+(1-\sqrt{2})=10-\sqrt{2}$$

이다.

20. [출제 의도] 정규분포곡선의 성질을 이해하고 있는가?

(ㄱ) 문제에서 주어진 표에서
$f(12)<f(4)<f(8)$ 이다. 정규분포곡선의 성질에서 x의 값이 m 에 가까워질수록 $f(x)$의 값이 크므로

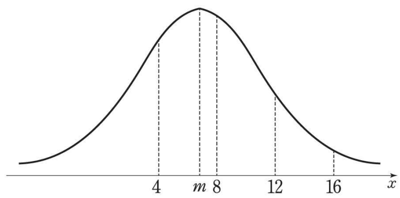
$$|m-12|>|m-4|>|m-8|$$

이다.

$|m-12|>|m-4|$ 에서 $m<\dfrac{12+4}{2}=8$

$|m-4|>|m-8|$ 에서 $m>\dfrac{4+8}{2}=6$

이므로 $6<m<8$ 이고, m 은 자연수이므로
$m=7$이다. (참)



(ㄴ) ㄱ에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 직선 $x=7$에 대하여 대칭이다. 따라서

$f(4)=f(10)=0.0753$, $f(12)=0.0457$
$g(4)=g(10)=0.0666$, $g(12)=0.0484$
에서 $g(10)<f(10)$, $g(12)>f(12)$ 이므로
사잇값 정리에 의하여 $f(k)=g(k)$ 를 만족시키는 k가 열린구간 $(10,\ 12)$ 에 존재한다. (참)

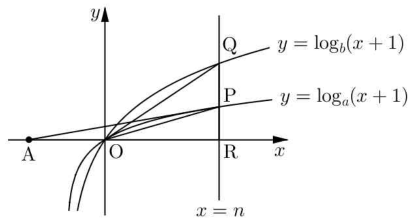
(ㄷ) ㄴ에서 $f(m)>g(m)$ 임을 알 수 있고,
정규분포곡선의 성질에 따라 $\sigma_1<\sigma_2$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제 의도] 로그와 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$a,\ b$ 의 대소관계에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $a>b$ 인 경우
$x>0$ 일 때, $\log_a(x+1)<\log_b(x+1)$이므로
두 곡선 $y=\log_a(x+1)$, $y=\log_b(x+1)$을
좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



이때 삼각형 AOP 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times log_a(n+1)=\log_a(n+1)$

이고, 삼각형 ROQ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times n\times log_b(n+1)=\dfrac{n}{2}\times\log_b(n+1)$

이고 두 삼각형의 넓이가 같으므로

$\log_a(n+1)=\dfrac{n}{2}\times\log_b(n+1)$

$\Rightarrow\ \dfrac{\log_a(n+1)}{\log_b(n+1)}=\dfrac{\log_{(n+1)}b}{\log_{(n+1)}a}=\log_a b=\dfrac{n}{2}$

이때 $a>b>1$이므로 $0<\log_a b<1$
$\therefore\ 0<n<2\ \Rightarrow\ n=1$

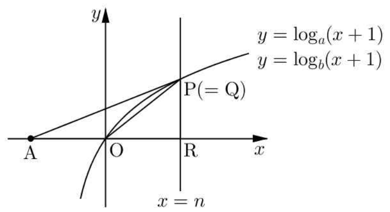
즉, $\log_a b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=b^2$ 이므로

이를 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(4,\ 2),\ (9,\ 3),\ (16,\ 4)$$

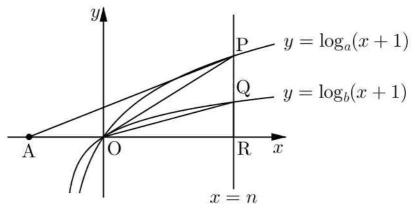
이다. 따라서 $a>b$일 때 문제의 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 3이다.

(2) $a=b$ 인 경우
$x>0$ 일 때 항상 $\log_a(x+1)=\log_b(x+1)$ 이므로
$\overline{AO}=\overline{OR}$ 이면 두 삼각형 AOP와 ROQ의 넓이가 같다. 즉, $n=2$이면 두 삼각형의 넓이가 같다.



따라서 $a=b$이면 항상 문제의 조건을 만족시킨다.
즉, 이 경우 문제의 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 15이다.

(3) $a<b$ 인 경우
$x>0$ 일 때, $\log_a(x+1)>\log_b(x+1)$이므로
두 곡선 $y=\log_a(x+1)$, $y=\log_b(x+1)$을
좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



(1)과 같은 방법으로
두 삼각형 AOP와 ROQ의 넓이가 같아지려면

$$\log_a b=\frac{n}{2}$$

이어야 한다.

이때 $\log_a b>1$이므로 $\dfrac{n}{2}>1\ \Rightarrow\ n>2$

(i) $n=3$ 인 경우

$$\log_a b=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ b^2=a^3$$

에서 b 는 세제곱수이어야 하므로 이를 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ 8)$뿐이다.

(ii) $n=4$ 인 경우

$$\log_a b=2\ \Rightarrow\ b=a^2$$

에서 이를 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(2,\ 4),\ (3,\ 9),\ (4,\ 16)$$

이다.

(i), (ii)에서 $a<b$일 때 문제의 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4이다.

(1), (2), (3)에서 문제의 조건을 만족시키는 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$3+15+4=22$$

22. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

이항정리에 의하여 $(x-3)^7$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는

$${}_7\mathrm{C}_5\times(-3)^2=21\times 9=189$$

23. [출제 의도] 함수의 연속의 뜻을 알고 있는가?

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

따라서 주어진 조건에서

$\dfrac{1}{2}f(1)+\dfrac{1}{3}f(1)=10$

$\Rightarrow \ \frac{5}{6}f(1)=10 \qquad \therefore \ f(1)=12$

24. [출제 의도] 삼각함수의 주기와 최댓값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|k|}$ 이므로

$\frac{2\pi}{|k|}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow |k|=4$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $k^2=|k|^2=16$

25. [출제 의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$g(x)=(x+2)f(x)-3x$ 라 하면 $f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)-3x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3$이고

$f(1)=1,\ f'(1)=5$ 이므로

$$\therefore\ g'(1)=f(1)+3f'(1)-3$$
$$=1+3\times5-3=13$$

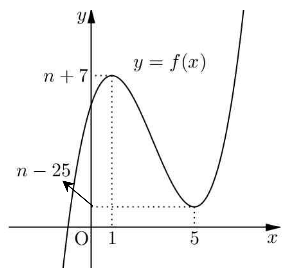
26. [출제 의도] 도함수를 부등식에 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$f(x)=x^3-9x^2+15x+n$이라 하면

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

이므로 함수 $f(x)$의 증감표와 그래프를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(+)$
$f(x)$	↗	$n+7$	↘	$n-25$	↗



따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 최솟값 $n-25$를 갖는다. 즉, $x>0$일 때 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $n-25\geq0$이어야 한다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 25이다.

27. [출제 의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

여학생 2명과 교사 2명을 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(4-1)!=6$이고,

남학생 3명을 위에서 배열된 여학생 2명과 교사 2명 사이에 배열하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{P}_3=24$$

따라서 남학생 3명이 서로 이웃하지 않도록 원탁에 앉는 방법의 수는

$$6\times24=144\ \cdots\ ①$$

교사 2명이 서로 이웃하도록 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$2\times(6-1)!=240\ \cdots\ ②$$

교사 2명이 서로 이웃하도록 교사 2명과 여학생 2명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$2\times(3-1)!=4$$

남학생 3명을 위에서 배열된 여학생 2명과 교사 2명 사이에 배열하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 남학생 3명이 서로 이웃하지 않고, 교사 2명이 서로 이웃하도록 7명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$$4\times6=24\ \cdots\ ③$$

①, ②, ③에서 문제의 조건을 만족하도록 7명이 원탁에 앉는 방법의 수는

$$144+240-24=360$$

28. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이므로

$a_{n+1}>a_n\geq0$이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=d$

$a_n<a_{n+1}\leq0$이면 $|a_{n+1}|-|a_n|=-d$

$a_n<0<a_{n+1}$이면 $-d<|a_{n+1}|-|a_n|<d$

이다.

따라서 조건 (가)로부터 $d=3$이다.

조건 (나)로부터

$a_5<0<a_6$이고, $|a_6|-|a_5|=a_6+a_5=1$

이다.

$a_6=a_5+3$이므로 $a_5=-1,\ a_6=2$이다.

즉, $a_1=-13$이고 $d=3$이므로

$\therefore\ a_n=3n-16$,

$$b_n=\begin{cases}-3 & (1\leq n<5)\\ 1 & (n=5)\\ 3 & (n>5)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{9}a_kb_k&=-3(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5\times1\\&\quad+3(a_6+a_7+a_8+a_9)\\&=3(a_6-a_1)+3(a_7-a_2)+3(a_8-a_3)\\&\quad+3(a_9-a_4)+(-1)\\&=3\times4\times5d-1=179\end{aligned}$$

(Tip1) 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

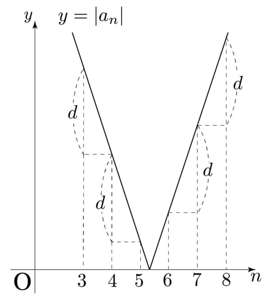
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

이다. 이를 n에 대하여 정리하면

$$a_n=dn+(a_1-d)$$

이므로, 등차수열의 각 항의 값은 기울기가 d인 직선 위의 점으로 표현할 수 있다.

이를 통해 $y=|a_n|$ 그래프를 ny평면에 그리면 다음과 같다.



그림을 통해 대부분은 $|a_{n+1}|-|a_n|$의 값이 '공차' 또는 '$-$공차'의 값을 가짐을 알 수 있고, 문제의 조건으로부터 공차는 3임을 알 수 있다.

한편 $b_5=1$이므로 a_5와 a_6의 값은 $y=|a_n|$ 그래프의 x절편을 기준으로 서로 반대편에 존재해야 함을 알 수 있다.

따라서 $a_5<0<a_6$ 이므로

$|a_6|-|a_5|=a_6-(-a_5)=1,\ a_6-a_5=3$ 에서

$a_5=-1,\ a_6=2$임을 알 수 있다.

(Tip2)

$a_6-a_1=a_7-a_2=a_8-a_3=a_9-a_4=5d$

29. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

별 무늬의 공이 2개 이상 들어간 상자를 정하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_1=4$$

이다. 이때 조건 (가)를 만족시키는 경우를 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

(1) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우

(i) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공이 2개 들어간 경우, 별 무늬의 검은 공은 별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 상자에 들어가야 하므로 별 무늬의 검은 공을 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1=3$$

남은 흰 공 1개와 검은 공 2개를 상자 4개에 나누어 넣는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2=40$$

이렇게 공을 나누어 넣는 경우, 항상 조건 (나)를 만족시키므로 (별 무늬의 흰 공이 2개 들어가는 상자가 존재한다..) 이 경우 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=120$$

(ii) 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자에 별 무늬의 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 들어간 경우, 상자에 들어가지 않은 별 무늬의 흰 공은 위의 상자와 다른 상자에 들어가야 한다.

(i)과 같은 방법으로 남은 별 무늬의 흰 공 하나와 흰 공 1개, 검은 공 2개를 상자에 나누어 담는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=120$$

이때, 조건 (나)를 만족시키기 위하여 위에서 구한 모든 경우에서 각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로 들어가는 경우를 제외해야 한다.

각 상자에 흰 공과 검은 공이 각각 1개 이하로

들어가는 경우의 수는
나머지 3개의 상자 중에서 별 무늬의 흰 공이
들어가는 방법의 수가 3,
별 무늬의 흰 공이 들어가지 않은 두 상자에 흰
공이 들어가는 경우의 수가 2,
검은 색 공이 3개의 상자에 각각 하나씩 들어가는
경우의 수가 ${}_3\mathrm{C}_2$ 이므로

$$3\times2\times{}_3\mathrm{C}_2=18$$

이다. 따라서 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120-18=102$$

(i), (ii)에서 별 무늬의 공이 2개 들어간 상자가 있는 경우, 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$120+102=222$$

(2) 별 무늬의 공이 3개 들어간 상자가 있는 경우

이 경우 조건 (나)를 항상 만족시키고, 남은 흰 공 1개와 검은 공 2개만 상자 4개에 나누어 담으면 된다. (1)과 같은 방법으로 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_2=40$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

$$4\times(222+40)=4\times262=p$$

이므로 $\dfrac{p}{4}=262$ 이다.

30. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

적분과 미분의 관계에서 $g'(x)=|f'(x)|$ 이다.

모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\geq 0$ 이므로
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$\lim\limits_{x\to-\infty}|f'(x)|=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}|f'(x)|=\infty$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

이므로 함수 $g(x)$는 치역이 실수 전체의 집합인 일대일대응이다.

따라서 세 방정식 $g(x)=0$, $g(x)=1$, $g(x)=2$의 실근은 각각 유일하게 존재한다.

이때 $g(0)=0$ 이고, 방정식 $g(x)=1$, $g(x)=2$의 해를 각각 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$라 하면
함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $|g(x)|$가 미분가능 $\Rightarrow$ $g'(0)=0$
함수 $|g(x)-1|$가 미분가능 $\Rightarrow$ $g'(\alpha)=0$
함수 $|g(x)-2|$가 미분가능 $\Rightarrow$ $g'(\beta)=0$

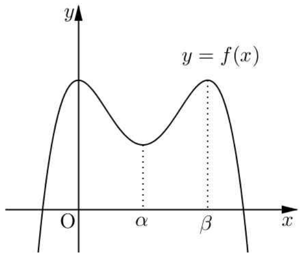
따라서

$$g'(0)=g'(\alpha)=g'(\beta)=0$$
$$\Rightarrow\ f'(0)=f'(\alpha)=f'(\beta)=0$$

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 -1이므로
$f'(x)$의 최고차항의 계수는 -4이다.

$\therefore\ f'(x)=-4x(x-\alpha)(x-\beta)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$g(\alpha)=1$ 이므로

$$\int_0^\alpha|f'(t)|dt=\int_0^\alpha(-f'(t))dt$$
$$=f(0)-f(\alpha)=1$$

$g(\beta)=2$ 이므로

$$\int_0^\beta|f'(t)|dt=\int_0^\alpha|f'(t)|dt+\int_\alpha^\beta|f'(t)|dt$$
$$=1+\int_\alpha^\beta f'(t)dt$$
$$=1+f(\beta)-f(\alpha)=2$$

즉 $f(0)-f(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)=1$ 이므로
$f(0)=f(\beta)$ 이고, $f(\alpha)=f(\beta)-1$이다.

따라서 $f(0)=f(\beta)=k$라 하면

$$f(x)-k=-x^2(x-\beta)^2$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=-2x(x-\beta)^2-2x^2(x-\beta)$$
$$=-2x(x-\beta)(2x-\beta)$$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\beta}{2}$

$f(\alpha)=k-1$ 이므로
$f(\alpha)-k=-\alpha^2(\alpha-\beta)^2$

$\Rightarrow\ -1=-\dfrac{\beta^2}{4}\times\dfrac{\beta^2}{4}$, $\beta=2$ $(\because\ \beta>0)$

$\therefore\ f'(x)=-4x(x-1)(x-2)$

$\therefore\ g'(4)=|f'(4)|=96$