정답 및 해설

1. 정답 ④

(가)에서 $\{f(x)\}^3$을 미분하면 $3\{f(x)\}^2 \cdot f'(x)$이고,

$\{f(2x+1)\}^3$을 미분하면

$3\{f(2x+1)\}^2 \cdot f'(2x+1) \cdot 2$이므로

$2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$을 적분하면

$$4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + C \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x = -\dfrac{1}{8}$을 대입하면

$$4 = \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 + C\left(\because\ f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1\right) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 $x = \dfrac{5}{2}$를 대입하면

$$4 \cdot \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 = 8 + C\ (\because\ f(6) = 2) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠에 $x = \dfrac{3}{4}$을 대입하면

$$4 \cdot \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 = \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 + C \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉣에 ㉡, ㉢을 대입하면 $C = \dfrac{8}{3}$

$$\therefore\ 4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + \frac{8}{3}$$

식에 $x = -1$을 대입하면

$4 \cdot \{f(-1)\}^3 = \{f(-1)\}^3 + \dfrac{8}{3}$이므로

정리하면 $f(-1) = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

2. 정답 27

함수 $g(x) = \dfrac{1}{2+\sin f(x)}$에서 양변을 미분하면

$$g'(x) = \frac{-f'(x)\cos f(x)}{\{2+\sin f(x)\}^2} = 0$$

$g'(x) = 0$인 경우는

$f'(x) = 0$ 또는 $\cos f(x) = 0 \quad \cdots\cdots (*)$

$\cos f(x) = 0$에서

$$f(x) = \cdots,\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$$

(가)조건에서 $\alpha_1 = 0$이고 $g(\alpha_1) = \dfrac{2}{5}$이므로

$$\frac{1}{2+\sin f(0)} = \frac{2}{5},$$

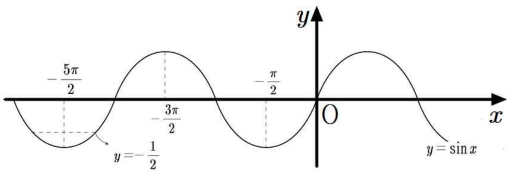
$$\sin f(0) = \frac{1}{2},$$

$$f(0) = \frac{\pi}{6}\ \left(\because\ 0 < f(0) < \frac{\pi}{2}\right)$$

(나)조건에서 $\dfrac{1}{g(\alpha_5)} = \dfrac{1}{g(\alpha_2)} + \dfrac{1}{2}$이므로

$$2 + \sin f(\alpha_5) = 2 + \sin f(\alpha_2) + \frac{1}{2}$$

$$\sin f(\alpha_5) = \sin f(\alpha_2) + \frac{1}{2}$$



그런데, 그림에서 $\sin(f(\alpha_n)) = \pm 1$이 성립한다.

따라서 $\sin f(\alpha_5) = \sin f(\alpha_2) + \dfrac{1}{2}$에서

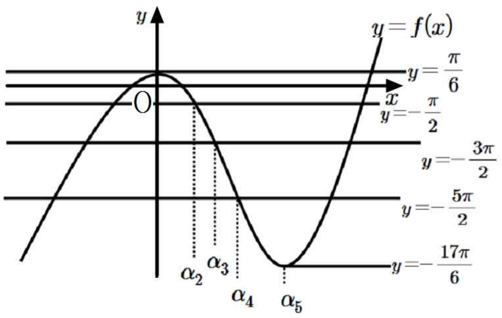
$\sin f(\alpha_2) = 1$이면 $\sin f(\alpha_5) = \dfrac{3}{2}$이라 모순

$$\therefore\ \sin(f(\alpha_2)) = -1$$

따라서 $\sin f(\alpha_5) = -1 + \dfrac{1}{2}$이므로 $\sin f(\alpha_5) = -\dfrac{1}{2}$

따라서 $(*)$에서 해 α_5는 $f'(x) = 0$ ($\because$ $\cos(f(\alpha_n)) \neq 0$)를 만족하는 해이다.

따라서 만족하는 그래프를 그려보면 다음과 같다



$f'(0)=0,\ f'(a_5)=0$에서 $f'(x)=18\pi x(x-a_5)$

($\because$ 3차항의 계수가 6π)라 놓고, 적분하면

$f(x)=6\pi x^3-9\pi a_5 x^2+C$ $\qquad\cdots\cdots\ (*')$

식 $(*')$에 $f(0)=\dfrac{\pi}{6},\ f(a_5)=-\dfrac{17}{6}\pi$를 대입하면

$$C=\frac{\pi}{6},\ a_5=1$$

따라서 함수 $f(x)$는

$f(x)=6\pi x^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{\pi}{6}$,

$f'(x)=18\pi x(x-1)$

$x=-\dfrac{1}{2}$를 대입하면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=6\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot(-2)+\frac{\pi}{6}$$

$$=-3\pi+\frac{\pi}{6} \qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=6\pi\left\{3\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=6\pi\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)=6\pi\times\frac{9}{4}$$

$$=\frac{27}{2}\pi \qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

$$\sin f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sin\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)\ (\because\ ㉠)$$

$$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\ ㉢$$

$$\cos f\left(-\frac{1}{2}\right)=\cos\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\cdots\cdots\ ㉣$$

$g'(x)=\dfrac{-f'(x)\cos f(x)}{\{2+\sin f(x)\}^2}$에 $x=-\dfrac{1}{2}$를 대입하면

$$\therefore\quad g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\dfrac{27}{2}\pi\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2}\ (\because\ ㉡, ㉢, ㉣)$$

$$=\frac{\dfrac{27\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{9}{4}}\pi$$

$$=3\sqrt{3}\pi$$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$이므로 $a=3\sqrt{3}$

$$\therefore\ a^2=27$$

3. 정답 ⑤

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\cos x dx = l$$

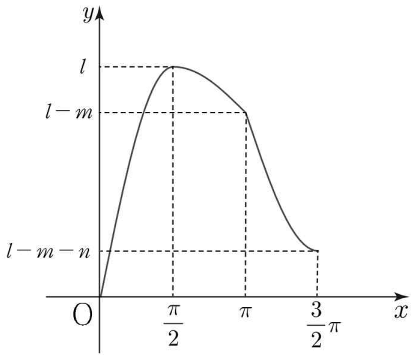
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x)dx = f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} m\cos x dx = -m$$

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f'(x)dx = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos x dx = -n$$

이고 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이므로 $y=f(x)$의

그래프를 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$가 최대가 되도록 유추해보면

다음과 같다.



$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$에서 $l-m-n=1$ $(l,\ m,\ n \geq 0)$이므로

$l+m+n \leq 10$에서 $2l \leq 11$이다.

따라서 정수 l의 최댓값은 5이고 $m+n=4$

$\cdots\cdots$ ㉠

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m\sin x + l - m)dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (n\sin x + l - m - n)dx$$

$$= l + \left\{(-m) + \frac{\pi}{2}(l-m)\right| + \left\{(-n) + \frac{\pi}{2}(l-m-n)\right\}$$

$$= (l-m-n)\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + (l-m)\frac{\pi}{2}$$

$$= \left(1+\frac{\pi}{2}\right) + (l-m)\frac{\pi}{2} \ (\because\ l-m-n=1)$$

따라서 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$가 최대가 되려면 $l-m$이 최대가

되어야 하므로 $m=1$

㉠에 대입하면 $n=3$

$\therefore\ l+2m+3n = 5+2+9 = 16$

4. 정답 30

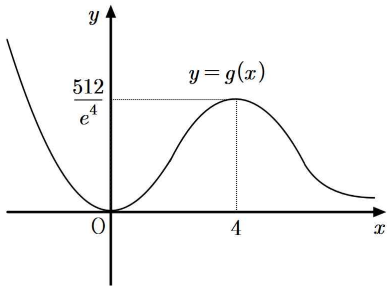
$g(x)=2x^4e^{-x}$을 미분하면

$g'(x)=-2x^3(x-4)e^{-x}$ 이므로

$g(x)$의 극솟값은 $g(0)=0$ 이고 극댓값은

$g(4)=\dfrac{512}{e^4}$ 이다.

따라서 $y=g(x)$의 개형은 그림과 같다.



[그림1]

$h(x)=(f\circ g)(x)$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

(나)를 만족하기 위해서는 $h'(0)=0$이고 $x=0$의

좌우에서 부호가 바뀌어야 한다.

그런데 $h'(0)=f'(g(0))g'(0)$, 즉

$h'(0)=f'(0)g'(0)$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극소이므로 함수 $f(x)$가

$x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 $x=0,\ \alpha$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

① $0=f(0)<f(\alpha)$이면 $h(x)=0$ 에서

$g(x)=0$ 이므로 실근은 $x=0$뿐이다.

② $0=f(\alpha)<f(0)$이면 $h(x)=0$ 에서

$g(x)=\alpha$ 이므로 [그림1]에서 실근의 개수는

3이하이다.

①, ②에서 (가)조건에 모순되므로 $f(0)=f(\alpha)$

이때, $h(x)=0$에서 $g(x)=0,\ \alpha$이므로

$0<\alpha<\dfrac{32}{e^4}$ 일 때 $h(x)=0$의 실근의 개수는

$1+3=4$이다.

또 그래프의 대칭성에 의하여 $y=f(x)$는 $x=\dfrac{\alpha}{2}$ 에서

극댓값을 갖는다.

(i) $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)>8$일 때,

방정식 $f(x)=8$은 서로 다른 네 실근

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\ (\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4)$를

갖는데 방정식

$g(x)=\alpha_1,\ g(x)=\alpha_2,\ g(x)=\alpha_3,\ g(x)=\alpha_4$

의 실근의 개수가 각각 0, 3, 3, 1이상이므로

방정식 $h(x)=8$의 실근의 개수는 7이상이다.

따라서 (다)조건에 부합하지 않는다.

(ii) $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)<8$이면 방정식 $h(x)=8$의 실근의 개수는

3이하이다.

따라서 이 범위에도 (다)조건에 부합하지 않는다.

(i), (ii)에서 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=8$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$이므로 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{32}=8$

$\therefore\ \alpha=4$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2(x-4)^2$

따라서 양변을 미분하면

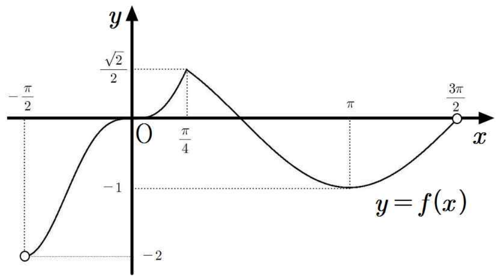
$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore\ f'(x)=2x(x-4)(x-2)$

$\therefore\ f'(5)=2\cdot5\cdot1\cdot3=30$

5. 정답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t} & (f(x)\ge t)\\ \sqrt{-f(x)+t} & (f(t)<t)\end{cases}$$

를 x에 대해 미분하면

$$y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} & (f(x)\ge t)\\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}} & (f(x)<t)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $f(x)$는

$x=\dfrac{\pi}{4}$에서 연속이다.

그런데,

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)\ne\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)$$

이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않다.

$t=-1$일 때 즉, $y=\sqrt{1+\cos t}$ 의 $x=\pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{h}{2}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}$$

$\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서

(ⅰ) $h<0$일 때,

$$\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ⅱ) $h>0$일 때,

$$\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{h}{2}}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t\le-2)\\ 2 & (-2<t<-1)\\ 3 & (t=-1)\\ 4 & (-1<t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & \left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1 & \left(t\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서

$a=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\ b=g(0)=2,\ c=g(-1)=3$

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로

$$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$$

이 성립하고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$$

라 할 수 있다.

$$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$$
$$=h(6)-f(5)+3$$
$$=(120+k)-(24+k)+3$$
$$=99$$

6. 정답 16

$g(t)$는 접선의 y절편이므로 $y=f(t)$의 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

따라서 y절편 $g(t)$는

$$g(t)=-tf'(t)+f(t)$$

$\cdots\cdots$ ㉠

주어진 조건 $g(t+1)-g(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$ 에서 양변을 적분하면

$$(좌변)=\int_0^x (g(t+1)-g(t))dt$$

$$=\int_0^x g(t+1)dt-\int_0^x g(t)dt$$

$$=\int_1^{x+1} g(t)dt-\int_0^x g(t)dt$$

$$\left(\because\ \int_0^x g(t+1)dt=\int_1^{x+1} g(t)dt\right)$$

$$=\int_0^{x+1} g(t)dt-\int_0^x g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$$

$$=\int_x^{x+1} g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$$(우변)=\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$=\Big[\ln(1+t^2)\Big]_0^x$$

$$=\ln(1+x^2)$$

따라서 $\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt=\ln(1+x^2)$

$$\therefore\ \int_x^{x+1} g(t)dt=\ln(1+x^2)+\int_0^1 g(t)dt$$

$\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)dt=h(x)$라 하면

$$h(x)=\ln(1+x^2)+\int_0^1 g(t)dt \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

그런데

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 (-tf'(t)+f(t))dt$$

$$=\int_0^1 (-tf'(t))dt+\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\Big[-tf(t)\Big]_0^1+2\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-f(1)+2\int_0^1 f(t)dt$$

$$=-4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉣}$$

$$\left(\because\ \int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4},\ f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}\right)$$

그런데

$$\int_{-4}^4 g(t)dt=\int_{-4}^4 (-tf'(t)+f(t))dt$$

$$=\int_{-4}^4 (-tf'(t))dt+\int_{-4}^4 f(t)dt$$

$$=[-tf(t)]_{-4}^4+2\int_{-4}^4 f(t)dt$$

$$=-4f(4)-4f(-4)+2\int_{-4}^4 f(t)dt$$

$$=-2\left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)$$

한편 $\displaystyle\int_x^{x+1} g(t)dt=h(x)$에서

$$\int_{-4}^4 g(t)dt=h(-4)+h(-3)+h(-2)+h(-1)$$
$$+h(0)+h(1)+h(2)+h(3)$$
$$=\ln 17+\ln 10+\ln 5+\ln 2+0+\ln 2$$
$$+\ln 5+10+8\int_0^1 g(t)dt\ (\because\ \text{㉢})$$

$$=\ln 17+4\ln 10-32-\ln 17-4\ln 10\ \ (\because\ \text{㉣})$$

$$=-32$$

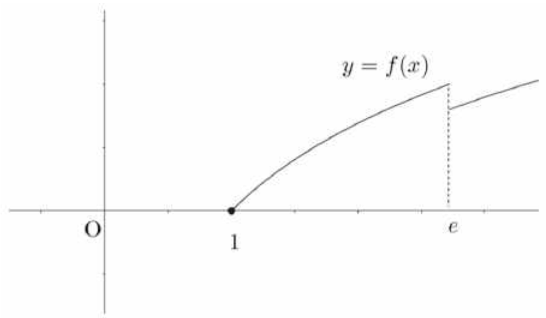
따라서

$$-2\left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)=-32$$

$$\therefore\ \left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)=16$$

7. 정답 ④

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



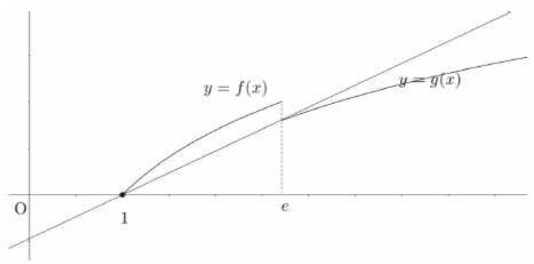
이때 일차함수 $g(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면

$1 \le x < e$일 때 $g(x) \le f(x)$이고,

$x \ge 1$일 때 $g(x) \ge f(x)$이어야 한다.

따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 다음과 같다.

(i) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재하지 않을 때



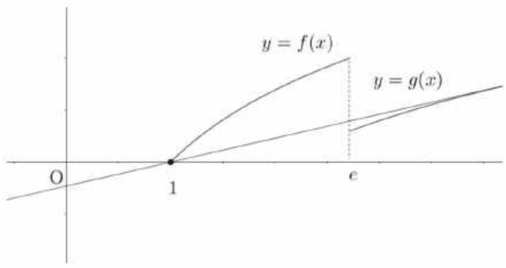
두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$를 지나는 직선의 기울기가 $h(t)$이다.

즉, $h(t)=\dfrac{-t+\ln e}{e-1}=\dfrac{-t+1}{e-1}$이다.

이때, $h'(t)=\dfrac{-1}{e-1}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$$

(ii) 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x\ (x \ge e)$에 그은 접선이 존재할 때



그 접선의 기울기가 $h(t)$이다.

이때 $f'(x)=\dfrac{1}{x}\ (x \ne e)$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$$h(t)=\frac{1}{\alpha}$$

한편, 접점 $(\alpha,\ -t+\ln\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-t+\ln\alpha)=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$$t-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}-1$$

$$\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}=t+1$$

이때 $h(t)=\dfrac{1}{\alpha}$이므로

$$\ln\frac{1}{h(t)}+h(t)=t+1$$

즉, $h(t)-\ln h(t)=t+1$이다.

위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}=1$$

이므로 $h'(t)=\dfrac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

한편, 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ f(e))$, 즉 두 점 $(1,\ 0)$, $(e,\ -t+1)$을 지나는 지선의 기울기는

$$\frac{-t+1}{e-1}$$

이고, 점 $\displaystyle\lim_{x\to e+}f'(x)=\frac{1}{e}$이므로

$$\frac{-t+1}{e-1}>\frac{1}{e}$$

즉, $t<\dfrac{1}{e}$이면

$$h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$$

이므로

$$h'(t)=\frac{-1}{e-1}$$

$$\frac{-t+1}{e-1}\le\frac{1}{2}$$

즉, $t\ge\frac{1}{e}$이면

$$h(t)-\ln h(t)=t+1$$

$$h'(t)=\frac{h(t)}{h(t)-1}$$

$\frac{1}{2e}<\frac{1}{e}$이므로

$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$$

한편, $t\le\frac{1}{e}$에서 $h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$의 최솟값은

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-\frac{1}{e}+1}{e-1}=\frac{1}{e}$$

한편, 양수 a에 대하여 $h(a)=\frac{1}{e+2}$일 때

$$h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}=h\left(\frac{1}{e}\right)$$

이므로 $a>\frac{1}{e}$이다.

따라서

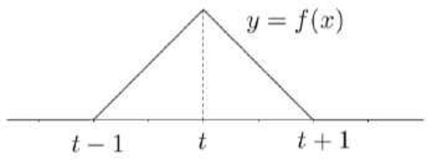
$$h'(a)=\frac{h(a)}{h(a)-1}=\frac{\frac{1}{e+2}}{\frac{1}{e+2}-1}=\frac{-1}{e+1}$$

따라서

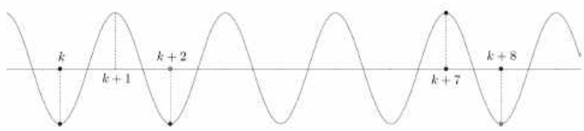
$$h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}$$
$$=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

8. 정답 21

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 홀수 k에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.



한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로
닫힌 구간 $[a,\ b]$가 $(-\infty,\ t-1]$에 포함되거나
$[t+1,\ \infty)$에 포함되면

$$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)\,dx=0$$

이다.

따라서 t의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $t+1\le k$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{k+8}0\times\cos(\pi x)\,dx=0$$

(ii) $t-1\le k\le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t+1}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

(iii) $k\le t-1<t+1\le k+8$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

(iv) $t-1\le k+8\le t+1$일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

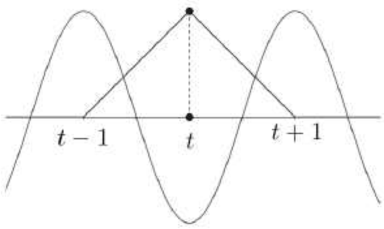
$$= \int_{t-1}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

(v) $t-1 \geq k+8$일 때

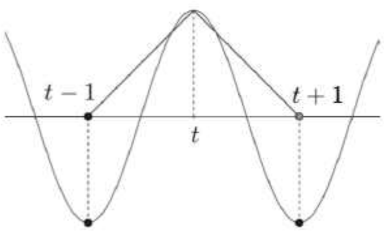
$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{k}^{k+8} = \times \cos(\pi x)\,dx = 0$$

한편, 다음 그래프에서 함수 $\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$는 t가 홀수일 때 극소이자 최소아고, t가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.



[t가 홀수일 때]



[t가 짝수일 때]

그런데,

$$\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi^2}$$

이므로 t가 $k \leq t-1 < t+1 \leq k+8$인 홀수일 때

$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} (1-|x|)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= -2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}$$

이고, t가 $k \leq t-1 < t+1 \leq k+8$인 짝수일 때

$$g(t) = \int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-\{x\})\cos(\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi^2}$$

이다.

그런데 k는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t = k$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{k}^{k+1} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{1} (1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}$$

을 갖는다.

(2) $t = k+8$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$= \int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}(1+x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=-\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx=-\frac{2}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서 극솟값

$$\int_{k}^{k+8}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=\int_{k+1}^{k+3}f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(1+x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$=-2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx=-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

(4) $t=k+4$, $+6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값

$$-\frac{4}{\pi^2}$$

를 갖는다.

이상에서

$\alpha_1=k$, $\alpha_2=k+2$, $\alpha_3=k+4$, $\alpha_4=k+6$, $\alpha_5=k+8$

이고,

$$g(\alpha_1)=g(\alpha_8)=-\frac{2}{\pi^2}$$

$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

이때 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=5k+20=45$이므로

$k=5$

또,

$$\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{5}g(\alpha_i)=-\frac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2)$$

$$=-\frac{16}{\pi^2}$$

따라서

$$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)=5-\pi^2\times\left(-\frac{16}{\pi^2}\right)=5+16=21$$

9. 정답 ②

(i) $a_1\le x\le a_2$일 때, 즉, $-1\le x\le 1$에서

$$f(x)=\sin 2\pi x$$

(ii) $a_2\le x\le a_3$일 때, 즉, $1\le x\le 2-\frac{1}{2}$에서

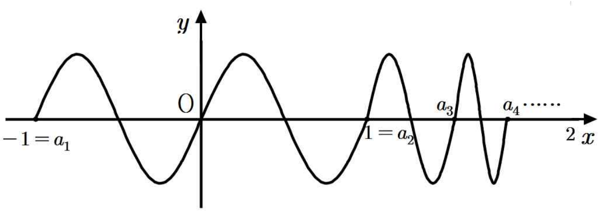
$$f(x)=\sin 2^2\pi x$$

(iii) $a_3\le x\le a_4$일 때, 즉, $2-\frac{1}{2}\le x\le 2-\frac{1}{2^2}$에서

$$f(x)=\sin 2^2\pi x$$

$$\vdots$$

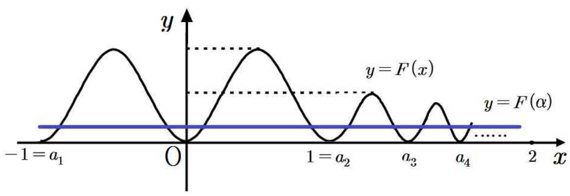
이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$F(t)=\int_0^t f(x)dx$라고 하면 $F'(t)=f(t)$이고

$$\int_0^{a_2}f(t)dt=0,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}f(t)dt=0,\ n\ge 2$$

이 성립하므로 $y=F(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



방정식 $\int_{\alpha}^{t}f(x)dx=0$을 만족시키는 $t\ \ (0<t<2)$의 값의 개수를 구하는 것은 위의 그래프에서 처럼 방정식 $F(t)=F(\alpha)$을 만족하는 t의 값의 개수를 구하는 것과 같다.

따라서 위의 그림에서 극댓값을 크기순으로 나열하면

$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{2^2\pi},\ \cdots$이므로 $t\ \ (0<t<2)$의 개수가 103개가 되기 위해서는 $F(\alpha)$의 값이 52번 째 극댓값과 같을 때이다.

따라서 $F(\alpha)=\dfrac{1}{2^{51}\pi}$ 이어야 한다.

즉, $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{1}{2^{51}\pi}$ 이고 $-1<\alpha<0$ 이므로

$$\int_0^{\alpha}\sin 2\pi x dx=\frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_0^{\alpha}=\frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$1-\cos 2\pi\alpha=2^{-50}$$

$$\therefore\ \log_2(1-\cos 2\pi\alpha)=-50$$

[다른 풀이]

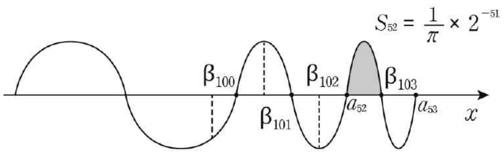
t의 값이 103개 존재하려면

$[0,\ a_2],\ [a_2,\ a_3],\ [a_3,\ a_4],\ \cdots,\ [a_{51},\ a_{52}]$에서

각각 2개씩 존재하고 $[a_{52},\ a_{53}]$에서 1개 존재해야 한다.

이때 t가 될 수 있는 값을 작은 값부터 차례로

$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \cdots,\ \beta_{103}$이라 두면 아래 그림과 같다.



위의 그램에서 $\beta_{103}=\dfrac{a_{52}+a_{53}}{2}$ 이 되어야 하므로

$$\int_{\alpha}^{0}\sin 2\pi x dx+\int_{a_{52}}^{\beta_{103}}f(x)dx=0$$

$$\therefore\ \int_{\alpha}^{0}\sin 2\pi x dx+\int_{a_{52}}^{\beta_{103}}f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x\right]_{\alpha}^{0}+\frac{1}{\pi}\times 2^{-51}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(1-\cos 2\pi\alpha)+\frac{1}{\pi}\times 2^{-51}$$

$$=0$$

$$\therefore\ 1-\cos 2\pi\alpha=2^{-50}$$

$$\therefore\ \log_2(1-\cos 2\pi\alpha)=-50$$

10. 정답 6

$h(x)=|\,g(x)-f(x-k)\,|$가 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖는데

$f(0)=\ln 2+2\neq 0$이므로

$$h(k)=f(0)-g(k)=g(k)$$

$$\therefore\ g(k)=\frac{1}{2}f(0)$$

따라서 $g(k)=\dfrac{1}{2}\ln 2+1=\ln\sqrt{2}\,e$

$\cdots\cdots$ ㉠

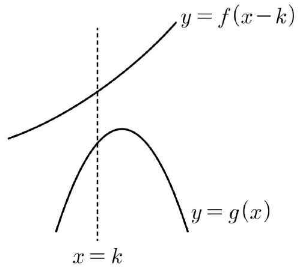
㉠에 의하여 이차함수 $g(x)$는

$$g(x)=a(x-k)+b(x-k)+\ln\sqrt{2}\,e$$

$h(x)=|\,g(x)-f(x-k)\,|>0$이고

$$h(k)=f(0)-g(k)$$이므로

$y=g(x)$와 $y=f(x-k)$의 위치관계는 다음 그림과 같다.



따라서 실수 전체 구간에서 $h(x)=f(x-k)-g(x)$를 만족한다

함수 $h(x)=f(x-k)-g(x)$가 미분가능한 함수이므로

$$h'(x)=f'(x-k)-g'(x)$$

에서 $h'(k)=f'(0)-g'(k)=0$이므로

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+2e^x,\ \ g'(x)=2a(x-k)+b$$

에서 $f'(0)=\dfrac{5}{2},\ g'(k)=b$이므로 $b=\dfrac{5}{2}$

닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 최댓값은 $x=k+1$에서 가지므로

$$h(k+1)=f(1)-g(k+1)=2e+\ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore\ a=-\frac{7}{2}$$

$$\therefore\ g(x) = -\frac{7}{2}(x-k)^2 + \frac{5}{2}(x-k) + \ln\sqrt{2}\,e$$

$$\therefore\ g'(x) = -7(x-k) + \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ g'\left(k-\frac{1}{2}\right) = -7\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 6$$

[참고]

닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서 $h(x)$가 $x = k-1$이 아닌 $x = k+1$에서 최댓값을 갖는 이유는

$$h(k-1) = f(-1) - g(k-1)$$
$$h(k+1) = f(1) - g(k+1)$$

에서

$$h(k+1) - h(k-1)$$
$$= f(1) - g(k+1) - \{f(-1) - g(k-1)\}$$
$$= f(1) - f(-1) - \{g(k+1) - g(k-1)\}$$

$$= 2 \cdot \left\{\frac{f(1) - f(-1)}{2}\right\}$$
$$-2 \cdot \left\{\frac{g(k+1) - g(k-1)}{2}\right\}$$

$$= 2f'(\alpha) - 2g'(\beta)$$ ($\because$ 평균값의 정리)

그런데 위의 그래프에서 닫힌구간 $[k-1,\ k+1]$에서

$$f'(\alpha) > g'(\beta)$$

따라서 $h(k+1) - h(k-1) > 0$이므로 최댓값은 $h(k+1)$

11. 정답 ④

$F(x) = \ln|\ f(x)\ |$를 미분하면

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 3$에서

$f(1) = 0$이다.

$$f(x) = (x-1)q(x)$$

라 하면 $f'(x) = q(x) + (x-1)q'(x)$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{Q(x) + (x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)} = 1 \neq 3$$

$f(x) = (x-1)^k h(x)$ ($k \geq 2$인 자연수)라 하면

$$f'(x) = k(x-1)^{k-1}h(x) + (x-1)^k h'(x)$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1}h(x) + (x-1)^k h'(x)\}}{(x-1)^k h(x)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{k(x-1)^k h(x) + (x-1)^{k+1}h'(x)}{(x-1)^k h(x)}$$
$$= k$$
$$\therefore\ k = 3$$

따라서 $f(x) = (x-1)^3(x+a)$의 꼴이 된다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) \times g(x)\sin x}{f(x)\{g'(x)\sin x + g(x)\cos x\}}$$
$$= \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x \to 0$일 때 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0) = 0$이다.

$$\therefore\ f(x) = (x-1)^3 x$$

x에 대해 미분하면

$f'(x) = 3(x-1)^2 x + (x-1)^3$이므로

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3(x-1)^2 x + (x-1)^3}{(x-1)^3 x} = \frac{4x-1}{x(x-1)}$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x + g(x)\cos x\}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{g(x)}{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ g(0) = 0$$

$g(x) = xk(x)$라 하면 $g'(x) = k(x) + xk'(x)$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\cdot \frac{xk(x)}{\{k(x)+xk'(x)\}\sin x + xk(x)\cos x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ k(0) = 0$$

따라서 $g(x) = x^m p(x)$ ($m \geq 2$인 자연수)라 하면

$g'(x) = mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\cdot \frac{x^m p(x)}{\{mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)\}\sin x + x^m p(x)\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$\cdot \frac{x^{m-1}p(x)}{\{mx^{m-1}p(x) + x^m p'(x)\}\frac{\sin x}{x} + x^{m-1}p(x)\cos x}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1}$$

이므로 $m = 3$

$$\therefore\ g(x) = x^3$$

$$\therefore\ f(3) + g(3) = 3 \cdot 2^3 + 3^3 = 51$$

12. 정답 16

점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때

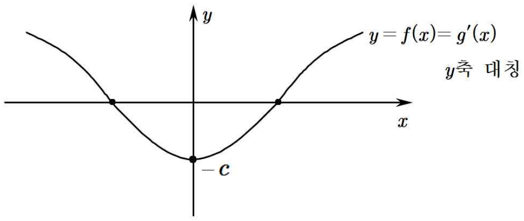
$f(x) = \ln(x^4+1) - C$이고 $g'(x) = f(x)$,

$g(a) = 0$이므로

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

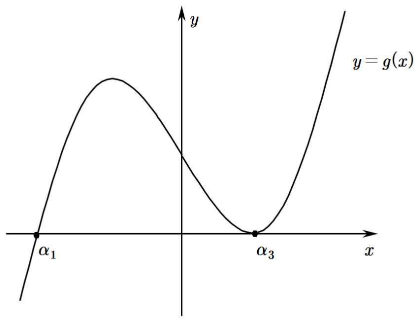
따라서 증감표를 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

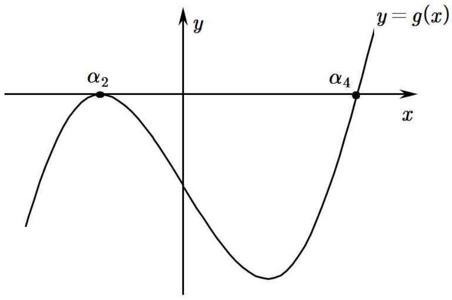


$y = g'(x)$가 y축 대칭이므로 $y = g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이 되면서 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 상황은 아래 그림과 같이 두 가지뿐이다.

(ⅰ)



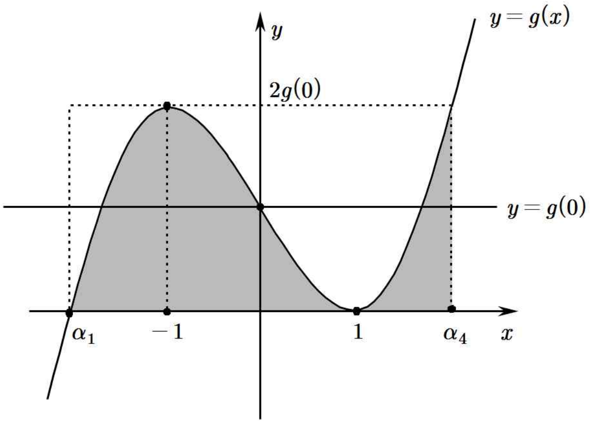
(ⅱ)



(ⅰ), (ⅱ)의 그래프에서 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $\alpha_3=1$이므로 $f(1)=0$

따라서 $\ln 2-c=0$에서 $c=\ln 2$

$a=\alpha_1$일 때



$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = g(0)\times(\alpha_4-\alpha_1) = 2g(0)\times\alpha_4$$

$$\int_0^1 |\,f(x)\,|dx = \int_0^1 |\,g'(x)\,|dx$$

$$= -\int_0^1 g'(x)dx$$

$$= -g(1)+g(0)=g(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$의 값은 위의 그림에서 구간 $[\alpha_1,\ 0]$에서의 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = (0-\alpha_1)\times 2g(0)$$

$$= -2\alpha_1\int_0^1 |\,f(x)\,|dx \ (\because ㉠)$$

$$= 2\alpha_4\int_0^1 |\,f(x)\,|dx$$

이므로 조건 (나)에서 $k=2$

따라서 $c=\ln 2,\ m=4,\ k=2$이므로

$$\therefore\ mk\times e^c = 4\times 2\times e^{\ln 2}$$

$$=4\times 2\times 2$$

$$=16$$

13. 정답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$\int_0^1 f(x)dx=2$에서

$$-S_1+S_2=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 |\,f(x)\,|dx = 2\sqrt{2}$에서

$$S_1+S_2=2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S_1=\sqrt{2}-1,\ S_2=\sqrt{2}+1$$

(ⅰ) $0\le x\le k$인 경우

$F(x)=\int_0^x(-f(t))dt$이므로

$F'(x)=-f(x)$

$\int_0^k f(x)F(x)dx$에서 $F(x)=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=0$,

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$이고,

$F'(x)\dfrac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_0^k f(x)F(x)dx = \int_0^{\sqrt{2}-1}(-s)ds$$

$$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(ⅱ) $k\le x\le 1$인 경우

$F(x)=(\sqrt{2}-1)\int_k^x f(t)dt$이므로

$F'(x)=f(x)$

$\int_k^1 f(x)F(x)dx$에서 $F(x)=s$로 놓으면

$x=k$일 때 $s=\sqrt{2}-1$,

$x=1$일 때 $s=2\sqrt{2}$이고, $F'(x)\dfrac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_k^1 f(x)F(x)dx$$
$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} sds = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$
$$= 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(i), (ii)에서

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx$$
$$= \int_0^k f(x)F(x)dx + \int_k^1 f(x)F(x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 + 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$
$$= 4 - (\sqrt{2}-1)^2$$
$$= 4 - (3 - 2\sqrt{2})$$
$$= 1 + 2\sqrt{2}$$

14. 정답 216

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x-a}$ $(x > a)$에서 $f(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{\alpha - a} = M$

$$f(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta - a} = M$$

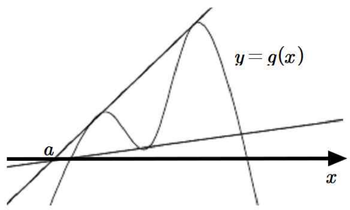
$f'(x) = \dfrac{g'(x)(x-a) - g(x)}{(x-a)^2}$ 에서 $f'(\alpha) = 0$이므로

$$g'(\alpha)(\alpha - a) - g(\alpha) = 0$$
$$g'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha - a},\ \ f'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta - \alpha}$$

이때, $g'(\alpha)$는 $x = \alpha$에서 곡선 $y = g(x)$의 접선의 기울기이고, $g'(\beta)$는 $x = \beta$에서 곡선 $y = g(x)$의 접선의 기울기이다.

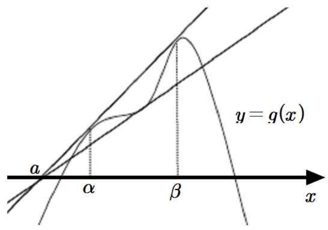
따라서 곡선 $y = g(x)$의 그래프는 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i)



함수 $y = g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y = g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개다. 이때 함수 $y = f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의
값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii)



함수 $y = g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y = g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개다. 이때, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는
x의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 함수 $y = g(x)$는 극값을 1개 갖는다.

$g(x) - kx = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 으로 놓으면

$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + kx$$

이므로

$$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + k$$

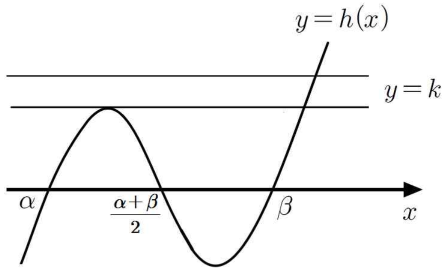
이때, $g'(x) = 0$

즉 $4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = k$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

이때,

$$h(x) = 4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

라 하면 곡선 $y = h(x)$와 직선 $y = k$는 한점에서 만나거나 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$의 극값은 $\beta = \alpha + 6\sqrt{3}$ 이므로

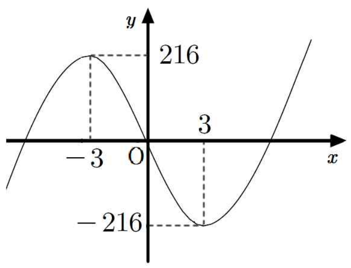
$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$으로 놓은 후

함수 $y = 4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극값을 구해도 된다.

이때, $y' = -12(x+3)(x-3)$이므로 $y' = 0$에서

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $y = 4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 k의 범위는

$$k \le -216 \text{ 또는 } k \ge 216$$

이때, $k > 0$이므로 k의 최솟값은 216다.

따라서 M의 최솟값도 216이다.

15. 정답 ③

조건 (가)에서 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2e^{-x^2}$이고 $f(1) = \dfrac{1}{e}$이므로

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2} f(t)dt \\
&= \frac{2}{e^4}\int_1^x \left(2te^{t^2} \times \frac{f(t)}{t}\right)dt \\
&= \frac{4}{e^4}\int_1^x \left\{\left(e^{t^2}\right)' \times \frac{f(t)}{t}\right\}dt \\
&= \frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2} \times \frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x e^{t^2} \times \left(\frac{f(t)}{t}\right)'dt\right\} \\
&= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2} \times \frac{f(x)}{x} - ef(1) - \int_1^x e^{t^2} \times \left(t^2e^{-t^2}\right)dt\right\} \\
&= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2} \times \frac{f(x)}{x} - 1 - \int_1^x t^2dt\right\} \\
&= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2} \times \frac{f(x)}{x} - 1 - \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\} \\
&= \frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2} \times \frac{f(x)}{x} - 1 - \frac{1}{3}\left(x^3 - 1\right)\right\}
\end{aligned}$$

$x = 2$를 대입하면

$$g(2) = \frac{2}{e^4}\left(e^4 \times \frac{f(2)}{2} - 1 - \frac{7}{3}\right)$$

$$g(2) = f(2) - \frac{20}{3e^4}$$

따라서 $f(2) - g(2) = \dfrac{20}{3e^4}$

16. 정답 48

$g(x)=\begin{cases}|2\sin 3x+1| & (x\geq 0)\\ |-2\sin x+1| & (x<0)\end{cases}$ 이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to 0+}g'(x)=6$, $\lim_{x\to 0-}g'(x)=-2$이다.

(ⅰ) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+}h'(x)=\lim_{x\to 0-}h'(x)$가 성립해야한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}h'(x)&=\lim_{x\to 0+}f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to 0+}f'(g(x))\times\lim_{x\to 0+}g'(x)\\&=f'(1)\times 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-}h'(x)&=\lim_{x\to 0-}f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to 0-}f'(g(x))\times\lim_{x\to 0-}g'(x)\\&=f'(1)\times(-2)\end{aligned}$$

즉 $6f'(1)=-2f'(1)$에서

$f'(1)=0$ …… ㉠

(ⅱ) $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하자.

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to \alpha+}h'(x)=\lim_{x\to \alpha-}h'(x)$가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \alpha+}h'(x)&=\lim_{x\to \alpha+}f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to \alpha+}f'(g(x))\times\lim_{x\to \alpha+}g'(x)\\&=f'(0)\times k\ \text{(단, } k\text{는 양의 상수)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \alpha-}h'(x)&=\lim_{x\to \alpha-}f'(g(x))g'(x)\\&=\lim_{x\to \alpha-}f'(g(x))\times\lim_{x\to \alpha-}g'(x)\\&=f'(0)\times(-k)\end{aligned}$$

즉 $kf'(x)=-kf'(0)$에서

$f'(0)=0$ …… ㉡

(ⅲ) 함수 $h'(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+}h''(x)=\lim_{x\to 0-}h''(x)$가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0+}h''(x)\\&=\lim_{x\to 0+}\left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]\\&=\lim_{x\to 0+}f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0+}f'(g(x))g''(x)\\&=\lim_{x\to 0+}f''(g(x))\times\lim_{x\to 0+}\{g'(x)\}^2+0\\&=f''(1)\times 6^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0-}h''(x)\\&=\lim_{x\to 0-}\left[f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)\right]\\&=\lim_{x\to 0-}f''(g(x))\{g'(x)\}^2+\lim_{x\to 0-}f'(g(x))g''(x)\\&=\lim_{x\to 0-}f''(g(x))\times\lim_{x\to 0-}\{g'(x)\}^2+0\\&=f''(1)\times(-2)^2\end{aligned}$$

즉 $36f''(1)=4f''(1)$에서

$f''(1)=0$ …… ㉢

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이고, ㉠, ㉡에서 $f'(1)=0$, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=(4x^2-4x)(x-a)$에서

$f''(x)=(8x-4)(x-a)+(4x^2-4x)$

㉢에서 $f''(1)=0$이므로 $4(1-a)+0=0$에서 $a=1$

따라서 $f'(x)=4x(x-1)^2$이므로

$f'(3)=4\times 3\times 2^2=48$

17. 정답 ①

ㄱ. 조건 ㈏에 의하여 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 조건 ㈎에서 $f(x) \neq 1$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 1$ 이다. (참)

ㄴ. 조건 ㈐에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \end{aligned}$$

이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 그 그래프는 원점에 대하여 대칭이며 $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq -1$

이므로 $-1 < f(x) < 1$ 이다.

즉, $1+f(x) > 0$, $1-f(x) > 0$ 이므로

$f'(x) > 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. $$\begin{aligned} f(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f''(x) = -2f(x)f'(x)$$

이때 $f''(x) = 0$ 이면 $f(x) = 0$

(왜냐하면 ㄴ에서 $f'(x) > 0$ 이므로)

그런데 $f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이고 $f(0) = 0$ 이고 증가하므로 변곡점은 $(0,\ 0)$ 뿐이 존재하지 않는다. (거짓)

18. 정답 83

조건 (나)

$\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+a) - f(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\cdots\cdots$ ㉠

이 식의 양변에 $x = -\dfrac{a}{2}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{a}{2}\right) - f\left(-\frac{a}{2}\right) = \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

조건 (가)에서 의해

$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ 이므로 $\cos\left(-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

$0 < a < 2\pi$ 에서 $-\dfrac{2}{3}\pi \leq -\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2}$ 따라서 $a = \dfrac{5\pi}{3}$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x+a) - f'(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

이 식에 $x = -\dfrac{a}{2}$ 를 대입하면

$$f'\left(\frac{a}{2}\right) - f'\left(-\frac{a}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$a = \dfrac{5}{3}\pi$ 이므로

$$2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$\cdots\cdots$ ㉡

$f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$ 에서

$$f'(x) = -3b\sin(3x) - 5c\sin(5x)$$

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3b\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 5c\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = -3b - \frac{5c}{2} = \frac{1}{2}$$

$-6b - 5c = 1$ $\cdots\cdots$ ㉢

한편 $\displaystyle\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 의 양변에 $x = -\dfrac{a}{2}$ 를 대입하면

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}\right)$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}\right)$$

$$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} \{b\cos(3t) + c\cos(5t)\}dt$$

$$= 2\left[\frac{b}{3}\sin(3t) + \frac{c}{5}\sin(5t)\right]_{0}^{\frac{a}{2}}$$

$$= 2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{3a}{2}\right) + \frac{c}{5}\sin\left(\frac{5a}{2}\right)\right\} = \sin\left(-\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

양변에 $a = \dfrac{5\pi}{3}$을 대입하면

$$2\left\{\frac{b}{3}\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{c}{5}\sin\left(\frac{25}{6}\pi\right)\right\} = \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\left(\frac{b}{3} + \frac{c}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\frac{2b}{3} + \frac{c}{5} = -1$$

$$10b + 3c = -15$$

$\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $b = -\dfrac{9}{4}$, $c = \dfrac{5}{2}$

따라서 $abc = \dfrac{5}{3}\pi \cdot \left(-\dfrac{9}{4}\right) \cdot \dfrac{5}{2} = -\dfrac{75}{8}\pi$

$p = 8$, $q = 75$이므로

$\therefore\ p + q = 83$

19. 정답 ④

$h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$이므로

$$h'(t) = \{f(t) - g(t)\} + t \times \{f'(t) - g'(t)\}$$

그러므로

$$h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\}$$

$\cdots\cdots$ ㉠

한편, $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$와 직선 $y = 5$가 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$$

$$x(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$x(x+5)(x-3) = 0$$

$\therefore\ x = -5$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 3$

그러므로

$$f(5) = 3,\ g(5) = -5$$

$\cdots\cdots$ ㉡

한편, $y' = 3x^2 + 4x - 15$에서

$$f'(5) = \frac{1}{3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 15} = \frac{1}{24}$$

$$g'(5) = \frac{1}{3 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 15} = \frac{1}{40}$$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$$h'(5) = \{3 - (-5)\} + 5\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right)$$

$$= 8 + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{97}{12}$$

20. 정답 35

(나)에 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$$f(0)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(나)에 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$$

$$\therefore \ \{f'(x)\}^2=4-2f(x)$$

(단, $f'(x)\ge 0,\ f(x)\le 2$) $\cdots\cdots$ ㉡

$x\le b$ 일 때

$f'(x)=2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$$4a^2(x-b)^2=4-2\{a(x-b)^2+c\}$$

$\cdots\cdots$ ㉢

㉢이 $x\le b$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$4a^2=-2a$ 이고 $4-2c=0$이다.

$$\therefore \ a=-\frac{1}{2},\ c=2$$

따라서 $x\le b$ 일 때

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2$$

이때 $b<0$이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\ge 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다. $\therefore \ b\ge 0$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$$f(0)=-\frac{1}{2}b^2+2=0$$

$$\therefore \ b^2=4 \quad \therefore \ b=2\,(\because \ b\ge 0)$$

이때 ㉡에서 $f'(x)\ge 0$이고 $f(x)\le 2$이므로

$x>b$ 일 때 $f(x)=2$이다. 따라서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+\left[2x\right]_2^6$$

$$=\left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)$$

$$=12-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}$$

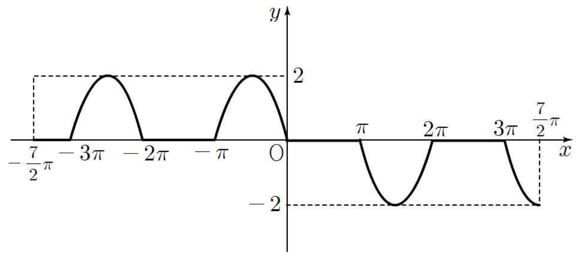
$$\therefore \ p+q=3+32=35$$

21. 정답 ①

$f(x)$를 범위에 따라 정리해보면

$$f(x)=\begin{cases}0 \ \left(-\frac{7\pi}{2}\le x\le -3\pi,\ -2\pi\le x\le -\pi,\ 0\le x\le \pi,\ 2\pi\le\right.\\ -2\sin x\,(-3\pi\le x\le -2\pi,\ -\pi\le x\le 0)\\ 2\sin x \ \left(\pi\le x\le 2\pi,\ 3\pi\le x\le \frac{7\pi}{2}\right)\end{cases}$$

그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt\ge 0$이 되도록 하는

실수 a의 최솟값 $\alpha=-\frac{7}{2}\pi$, 최댓값 $\beta=-3\pi$

$$\therefore \ \beta-\alpha=-3\pi-\left(-\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi$$

22. 정답 15

$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b + c)e^x$$

$f(x)$ 가 $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2 + (2a+b)x + b + c = 0$의 근이 $x = \sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\dfrac{2a+b}{a} = 0$,

$\dfrac{b+c}{a} = -3$ 이므로

$b = -2a$, $c = -a$

$\therefore$ $f'(x) = a(x^2 - 3)e^x$, $f(x) = a(x^2 - 2x - 1)e^x$

$0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \ge 0$ 이므로 양변을

$x_2 - x_1 (> 0)$ 로 나누어 식을 정리하면

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ge -1$

$f(x)$ 가 $x \ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ $(0 \le x_1 < c < x_2)$이다.

$\therefore$ $f'(c) \ge -1$

즉, $x \ge 0$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값이 -1 이고 $f(x)$ 의 변곡점에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 가지므로

$f''(x) = a(x^2 + 2x - 3)e^x = 0$ 에서 $x = -3, 1$

$x \ge 0$ 을 만족하는 $x = 1$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 갖는다.

$f'(1) = -2ae = -1$ 에서 $a = \dfrac{1}{2e}$ $\quad \therefore a \le \dfrac{1}{2e}$

따라서,

$abc = a(-2a)(-a) = 2a^3 \le 2\left(\dfrac{1}{2e}\right)^3 = \dfrac{\frac{1}{4}}{e^3}$ 이므로

$k = \dfrac{1}{4}$

$\therefore 60k = 15$

23. 정답 ④

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선 $f'(x) \ge 0$ 또는 $f'(x) \le 0$이어야 한다. $f(x)$를 미분하면

$f'(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + e^{x+1}\{2x + (n-2)\} + a$

$f'(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a$

이다. 이때

$\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ 이고 $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = a$이므로

$f(x)$가 역함수를 갖기 위해선 $f'(x) \ge 0$이어야 한다.

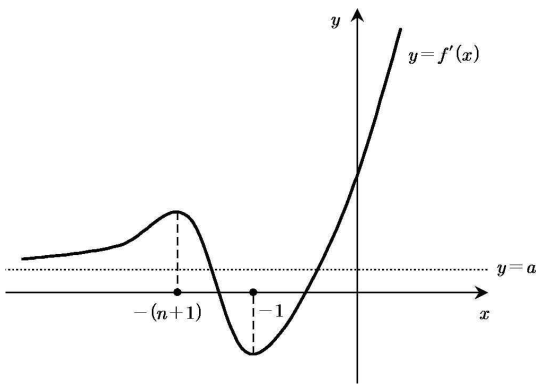
$f''(x)$를 구하면

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + e^{x+1}(2x + n)$$

$$f''(x) = e^{x+1}(x^2 + (n+2)x + n + 1)$$

$$= e^{x+1}(x+1)\{x + (n+1)\}$$이므로

$f'(x)$는 $x = -1$에서 극소이며 최솟값이므로 $f'(x)$의 그래프를 그려보면



따라서

$$f'(-1) = e^0\{(-1)^2 + n(-1) + 1\} + a = 2 - n + a \ge 0$$

$$\therefore a \ge n - 2$$

따라서

$$\therefore g(n) = n - 2$$

$$1 \le g(n) \le 8 \Leftrightarrow 1 \le n - 2 \le 8$$

$$\Leftrightarrow 3 \le n \le 10$$

따라서 $n = 3, 4, \ldots, 10$이고

$$\therefore \sum_{k=3}^{10} k = \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{2} k = 55 - 3 = 52$$

24. 정답 128

$0 \le k \le 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여

① $f(k+t) = f(k)$ $(0 < t \le 1)$ 인 경우

$k < x \le k+1$ 에서 $f(x) = f(k)$: 상수함수

② $f(k+t) = 2^t \times f(k)$ $(0 < t \le 1)$ 인 경우

$k < x \le k+1$ 에서 $f(x) = f(k) \times 2^{x-k}$: 지수함수

주어진 조건에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하지 않은 점이

2 개

이므로 ① ⇨ ② ⇨ ① 또는 ② ⇨ ① ⇨ ②처럼 변화되는

지점이 2번 있어야 한다. 또한 ②가 7번이상 나오면

$f(8) > 100$

이 되므로 조건을 만족하지 않는다.

가능한 경우 중에 ②가 그려지는 구간이 많이 들어가

있을수록 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 값이 커지므로 8개의 소구간이

①②②②②②②①

의 순서로 이어지는 연속함수일 때, $\int_0^8 f(x)dx$ 가 최대가

된다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 함수 중 $\int_0^8 f(x)dx$ 가

최대가

될 때, 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} f(0) = 1 & (0 \le x \le 1) \\ f(1) \times 2^{x-1} = 2^{x-1} & (1 \le x \le 7) \\ f(7) = 64 & (7 \le x \le 8) \end{cases}$$ 이다.

따라서 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은

$$\int_0^8 f(x)dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^7 2^{x-1}dx + \int_7^8 64\,dx$$

$$= [\,x\,]_0^1 + \left[\frac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^7 + [\,64x\,]_7^8$$

$$= 65 + \frac{63}{\ln 2}$$

$\therefore\ p+q = 65+63 = 128$

25. 정답 39

$$|f(x)| = \begin{cases} -e^{x+1}+1 & (x < -1) \\ e^{x+1}-1 & (x \ge -1) \end{cases}$$

이므로

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \begin{cases} -e^{x+1} & (x < -1) \\ e^{x+1} & (x \ge -1) \end{cases}$$

이다.

따라서 $p(x) = 100|f9x|$라 하면 함수 $p(x)$는

$x = -1$에서 미분가능하지 않고.

$\lim_{x \to -1-0} p'(x) = -100,$

$\lim_{x \to -1+0} p'(x) = 100$이다.

한편, $k = 2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k) = e^{x^{2m-1}+1} - 1$이므로

$f(x^k) = e^{x^{2m-1}+1} - 1 = 0$에서 $x = -1$

$$\left|f\left(x^{2m-1}\right)\right| = \begin{cases} -e^{x^{2m-1}+1}+1 & (x < -1) \\ e^{x^{2m-1}+1}-1 & (x \ge -1) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}|f(x)| = \begin{cases} -(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x < -1) \\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x > -1) \end{cases}$$

따라서 $q\left(x^{2m-1}\right) = \left|f\left(x^{2m-1}\right)\right|$이라 하면 함수

$q\left(x^{2m-1}\right)$는 $x = -1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x \to -1-0} q'\left(x^{2m-1}\right) = -(2m-1),$

$\lim_{x \to -1+0} q'\left(x^{2m-1}\right) = 2m-1$이다.

또 $f = 2m$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k) = e^{x^{2m}+1} - 1$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x^k) > 0$이다.

따라서 $|f(x^k)| = e^{x^{2m}+1} - 1$이므로

$\frac{d}{dx}|f(x^k)| = 2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$

따라서 $r\left(x^{2m}\right) = \left|f\left(x^{2m}\right)\right|$이라 하면 함수 $r\left(x^{2m}\right)$은

실수 전체 집합에서 미분가능하다.

이제 $n = 2m-1$ 또는 $n = 2m$일 때, 함수

$100|f(x)| - \sum_{k=1}^{m} \left|f\left(x^{2k-1}\right)\right|$를 $s(x)$라 하자. 즉

$s(x) = p(x) - \sum_{k=1}^{m} q\left(x^{2k-1}\right)$

이때 함수 $s(x)$가 $x = -1$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는

실수전체의 집합에서 미분가능하다.

$x \neq -1$일 때, $s'(x) = p'(x) - \sum_{k=1}^{m} q'(x^{2k-1})$이므로

$$\lim_{x \to -1-0} s'(x) = -100 + \sum_{k=1}^{m} (2k-1)$$

$$\lim_{x \to -1+0} s'(x) = 100 - \sum_{k=1}^{m} (2k-1)$$

이때 함수 $s(x)$가 $x = -1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \to -1-0} s'(x) = \lim_{x \to -1+0} s'(x)$$

즉, $-100 + \sum_{k=1}^{m} (2k-1) = 100 - \sum_{k=1}^{m} (2k-1)$이어야 한다.

$\sum_{k=1}^{m} (2k-1) = m^2 = 100$에서 $m = 10$

따라서 $n = 2m-1$또는 $n = 2m$이므로 $n = 19$또는 $n = 20$이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $19 + 20 = 39$

26. 정답 127

$(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \left| tf(t+1) - (t+1)f(t) \right| = \frac{t+1}{t}$$

양변을 $t(t+1)$ 로 나누면

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f(t+1)}{t+1} - \frac{f(t)}{t} \right| = \frac{1}{t^2}$$

$f(t)$ 는 감소함수이고 $f(t) > 0$ 이므로

$$\frac{f(t)}{t} > \frac{f(t+1)}{t+1}$$

$$\therefore \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{2}{t^2}$$

$$\frac{f(t+1)}{t+1} - \frac{f(t)}{t} = -\frac{2}{t^2} \cdots (ㄱ)$$

(ㄱ)은 $\int_t^{t+1} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{2}{t} + c$ 를 양변 미분한 것이다

$t = 1$ 일 때, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + c = 2$에서 $c = 0$

$$\therefore \int_t^{t+1} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{2}{t}$$

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63}$$

$\therefore p + q = 127$

27. 정답 67

함수 $f(x)$ 가 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 을 지나고

$1 \le f'(x) \le 3$이므로

(1) 두 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$ 을 잇는 직선의 기울기가 1 이므로 $3 \le x \le 4$ 에서 $f(x)=x+4$

(2) 두 점 $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 을 잇는 직선의 기울기가 3 이므로 $5 \le x \le 6$ 에서 $f(x)=3x-5$

(3) 주어진 조건에 의해 $(4,\ 8)$과 $(5,\ 10)$을 지나는 함수는

이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8a+b=1$

$f'(5)=10a+b=3$

$a=1,\ b=-7$

$f(4)=8$에서 $c=20$ 이므로

$4 \le x \le 5$ 에서 $f(x)=x^2-7x+20$

(1), (2), (3)에 의해

$$\int_3^6 f(x)dx=$$

$$\int_3^4(x+4)dx+\int_4^5(x^2-7x+20)dx+\int_5^6(3x-5)dx$$

$$=\frac{167}{6}$$

$\therefore 6a=167$

28. 정답 72

$$g(x)=f(x)e^{-x}$$

$$g'(x)=f'(x)-f(x)e^{-x}$$

$$g''(x)=f''(x)-2f'(x)+f(x)e^{-x}$$

$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이

$x=1,\ x=4$이므로

이차방정식 $ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$

은 $x=1,\ x=4$를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5,\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로

$$b=-a,\ c=0$$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고

$$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\ g(t))$에서 그은 접선의 방정식은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

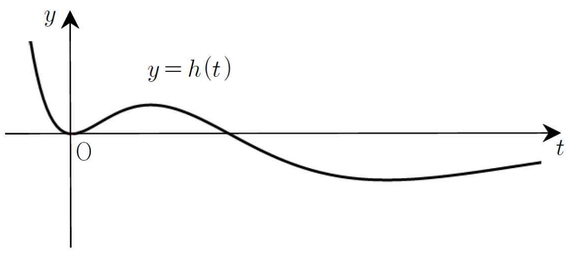
이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서

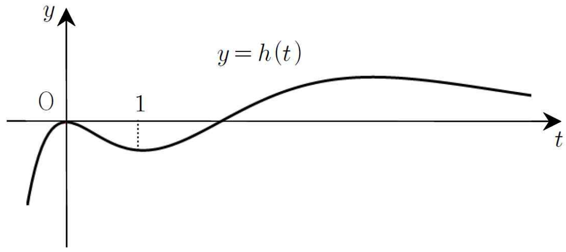
$$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^{2}\times f(4)e^{-4}$

$=72a^{2}e^{-2}$

$=72e^{2}e^{-2}$

$=72$

29. 정답 ②

$x=e^{t},\ y=(2t^{2}+nt+n)e^{t}$ 에서 $\dfrac{dx}{dt}=e^{t}$

$\dfrac{dy}{dt}=(4t+n)e^{t}+(2t^{2}+nt+n)e^{t}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=(4t+n)+(2t^{2}+nt+n)$

$=2t^{2}+(4+n)t+2n=(2t+n)(t+2)$

$\dfrac{dy}{dx}=0$ 에서 $t=-2$ 또는 $t=-\dfrac{n}{2}$

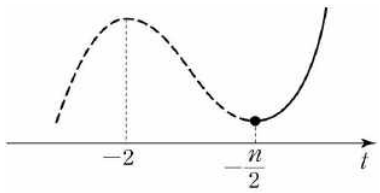
이때, $x\geq e^{-\frac{n}{2}}$ 에서 $x=e^{t}$ 이므로 $t\geq-\dfrac{n}{2}$

따라서 $t\geq-\dfrac{n}{2}$에서 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값을 구하면

(i) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 일 때, 그래프의 개형이 그림과

같으므로 $t=-\dfrac{n}{2}$일 때, 즉 $x=e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때,

최솟값을 가진다.

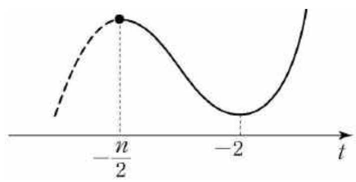


따라서, 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은

$$\left(2\cdot\frac{n^{2}}{4}-\frac{n^{2}}{2}+n\right)e^{-\frac{n}{2}}=ne^{-\frac{n}{2}}$$

(ii) $n\geq 5$ 일 때, 그래프의 개형이 그림과 같으므로

$t=-2$ 일 때, 즉 $x=e^{-2}$ 일 때, 최솟값을 가진다.



따라서, 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은

$(2\cdot 4-2n+n)e^{-2}=(8-n)e^{-2}$

$\therefore\ \dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}+\dfrac{b_5}{a_5}+\dfrac{b_6}{a_6}$

$=\dfrac{3e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}+\dfrac{4e^{-\frac{4}{2}}}{e^{-\frac{4}{2}}}+\dfrac{3e^{-2}}{e^{-2}}+\dfrac{2e^{-2}}{e^{-2}}$

$=3+4+3+2=12$

30. 정답 17

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

에서 $e^x=t$ 로 놓으면 $x=\ln t$

$$g(t)=\begin{cases} f(\ln t) & (1\le t<e) \\ g\left(\dfrac{t}{e}\right)+5 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x)dx=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$$

$$=6e^2+4 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때, $\displaystyle\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx$ 에서 $\dfrac{x}{e}=p$ 로 놓으면

$dx=e\,dp$

$$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx=e\int_1^e\{g(p)+5\}e\,dp$$

$$=e\int_1^e g(p)dp+e\int_1^e 5\,dp$$

$$=2\int_1^e g(p)\,dp+5e(e-1)$$

$$=e\int_1^e f(\ln p)\,dp+5e(e-1)$$

이므로 ㉠에서 $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)dx=A$ 라 하면

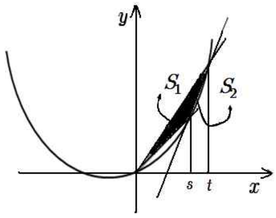
$$A+eA+5e(e-1)=6e^2+4$$

$$A(1+e)=e^2+5e+4=(e+4)(e+1)$$

$$\therefore\ A=ae+b=e+4$$

$$\therefore\ a=1,\ b=4 \quad \therefore\ a^2+b^2=17$$

31. 정답 109



$\mathrm{A}(s,\ s^2+s)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2+t)$이고

(ⅰ) 빗금 친 부분의 위쪽 넓이는

$$S_1=\frac{1}{2}\left|\ s(t^2+t)-t(s^2+s)\ \right|=\frac{1}{2}st(t-s)$$

($\because$ $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대해 삼각형 OAB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\left|\ a_1b_2-a_2b_1\ \right|$)

(ⅱ) 빗금 친 부분의 아래 넓이는

$$S_2=\frac{1}{6}(t-s)^3$$

$$k=S_1+S_2=\frac{1}{2}st(t-s)+\frac{1}{6}(t-s)^3$$

$$=\frac{1}{6}(t-s)\{3st+(t-s)^2\}=\frac{1}{6}(t-s)(t^2+st+s^2)$$

$$=\frac{1}{6}(t^3-s^3)$$

$$\therefore\ t^3=s^3+6k$$

이고 s, t가 모두 양수 이므로

$$t^2=(s^3+6k)^{\frac{2}{3}}$$

$(s,\ t)$와 $(1,\ 0)$사이의 거리의 제곱은 다음과 같다.

$$f(s)=(s-1)^2+t^2=(s-1)^2+(s^3+6k)^{\frac{2}{3}}$$

이것은 s에 관한 미분가능 함수이므로 최대가 되는 순간의 s값이 $\dfrac{2}{3}$ 이므로 $f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=0$

$$f'(s)=2(s-1)+\frac{2}{3}(s^3+6k)^{-\frac{1}{3}}(3s^2)$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{4}{3}=0$$

$$\therefore\ k=\frac{28}{81}$$

$$\therefore\ p+q=81+28=109$$

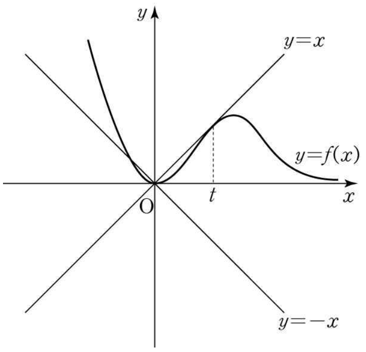
32. 정답 ⑤

$f(x)=kx^2e^{-x}\quad(k>0)$에서

$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$

함수의 증가, 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4k}{e^2}$	↘



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값이 $g(t)$이므로 $y=f(x)$와 직선 $y=x,\ y=-x$의 교점을 찾는다.

이때 미분 가능하지 않는 점이 한 곳에만 있으려면 $x<0$일 때, $y=f(x)$와 $y=-x$의 교점에서 미분 가능하지 않으므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 $y=x$가 만나지 않거나 접하여야 한다.

따라서 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$$kt^2e^{-t}=t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로

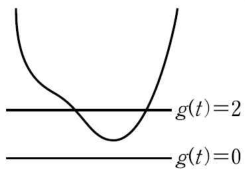
$$kt(2-t)e^{-t}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

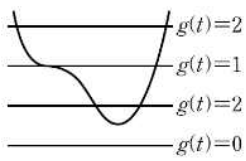
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $t=1,\ k=e$이다.

따라서 k의 최댓값은 $k=e$이다.

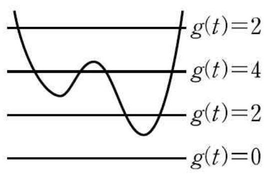
33. 정답 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로

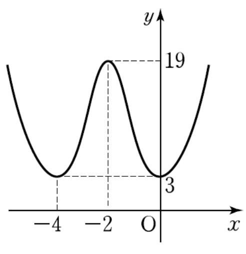
$f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

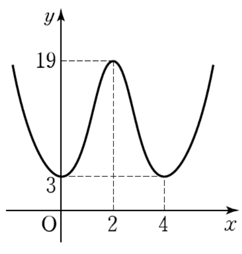
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$

에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19\quad\therefore \alpha=\pm4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times36+3=147$

34. 정답 ④

조건에서 $f(a)=0$이고

$f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한

$f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx = \int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx$$

$$=[-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

($\because$ 부분적분법)

$$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$

$$=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면

$$2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$$

$\begin{cases} x=a \rightarrow t=2a \\ x=20 \rightarrow t=4a \end{cases}$로 변환되므로

$$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$$

35. 정답 ③

주어진 조건 (가), (나), (다)에 의하여 구간 $(0,1)$에서 $f(x)=e^x$임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 구간 $1\le x<2$에서

$f(e)=1,\ f'(1)=e$이고 (나) 조건에 의하여 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로

$e=f'(1)\le f'(x)$이다.

이 때, $1\le x<2$인 구간에서 이 식의 양변을 적분하면

$\int_1^x e\,dx \le \int_1^x f'(x)dx$ 즉 $ex\le f(x)$이므로

다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 e\,xdx \le \int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge \int_0^1 e^x dx+\frac{3e}{2}=\frac{5e}{2}-1$$

구하는 최솟값은 $\frac{5e}{2}-1$이다

36. 정답 ⑤

ㄱ. (참)

$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx=k$ …… ㉠

에서

$1-x=t$로 놓으면 $-dx=dt$이고,

$x=0$이면 $t=1$, $x=1$이면 $t=0$이므로

㉠에서

$-\int_1^0 \{f'(1-t)g(t)-g'(1-t)f(t)\}dt=k$

$\int_1^0 \{g'(1-t)f(t)-f'(1-t)g(t)\}dt=k$

$\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. (참) $\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$

$=[f(x)g(1-x)]_0^1+\int_0^1 f(x)g'(1-x)dx$

$-\left\{[g(x)f(1-x)]_0^1+\int_0^1 g(x)f'(1-x)dx\right\}$

$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}$

$+\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx$

$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}-k$

$\therefore\ 2k=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}$ …… ㉡

이때, $f(0)=f(1)$, $g(0)=g(1)$이므로 $k=0$

ㄷ. (참) $g(0)=\sin 0=0$, $g(1)=\sin\pi=0$이므로

㉡에서 $2k=0$ $\quad\therefore\ k=0$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.