Annotation

CP 04 초월함수의 그래프의 개형은 미분과 기본연산을 활용하라.

다항함수든 **초월함수**[1]든 수능에서 가장 중요한 것은 일단 미분해서 개형을 추론하는 것이다. **미분해서 도함수를 활용하는 것**이 모든 수능 문제 해결의 기본이고 거의 전부이다.
일단 초월함수의 특징에 대하여 몇 가지 생각해보자.

① 정의역과 치역이 매우 다양하다.

다항함수는 항상 정의역이 $(-\infty,\ \infty)$이고 치역은 $(a,\ \infty)$혹은 $(-\infty,\ \infty)$이다.[2]
하지만 초월함수의 경우 정의역이나 치역이 매우 다양할 수 있다.

예를 들어 e^{-x^2}의 경우 $-x^2 \leq 0$이므로 $0 < e^{-x^2} \leq e^0 = 1$이므로 치역의 범위가 $(0,\ 1]$인 것을 알 수 있다.

② 주기성 혹은 대칭성을 가지는 경우가 있다.

앞서 공부한 $f(x)=e^{-x^2}$의 경우 $f(x)=f(-x)$를 만족하므로 y축 대칭함수이다.
또한 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$와 같은 초월함수는 다항함수와는 다르게
$f(x)=f(x+2\pi)$를 만족하므로 주기가 2π인 주기성을 가진다.[3]

③ 점근선을 가지는 경우가 있다.

앞서 공부한 $f(x)=e^{-x^2}$으로 확인해보자.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 x축이 곧 점근선임을 예측할 수 있다.

위의 특징 ①, ②, ③은 주로 다항함수와의 차이점으로 부각되는 것들이고
일반적으로 **도함수를 통해서 초월함수의 그래프의 개형을 추론하는 것은 완전히 동등하고 초월함수에서도 매우 중요**하다.

위의 방법들을 토대로 초월함수의 그래프 그리는 방법을 교과서에서 다음과 같이 설명한다.[4]

> **① 곡선이 존재하는 범위 (정의역, 치역)을 찾는다.**
> **② 곡선의 대칭성, 주기성을 파악한다.**
> **③ x절편과 y절편을 찾는다.**
> **④ 함수의 증가와 감소, 극값을 찾는다. ← $f'(x)$를 이용하는 중요한 과정**
> **⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점을 찾는다. ← $f''(x)$를 이용하는 중요한 과정**
> **⑥ 극한값, 점근선을 찾는다.**

1) 고교과정에서는 다항함수가 아닌 거의 대부분의 함수를 초월함수라 해도 크게 문제없다.

2) 최고차항의 계수가 양수이고 차수가 짝수면 치역이 $(a,\ \infty)$이고 홀수면 치역이 $(-\infty,\ \infty)$임을 그래프를 통해 쉽게 이해할 수 있다.

3) 다항함수의 경우 상수함수를 제외하고는 절대 $f(x)=f(x+p)$ $(p>0)$라는 식을 만족시킬 수 없다.

4) 외울 필요 없음.

기본개념완성

Annotation

하지만 이 방법을 모두 암기해서 차근차근 해나간다는 것은 상당히 곤혹스러운 일이다. 사실 ④, ⑤를 제외한 과정은 기본적인 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해서 충분히 추론이 가능하고 대입은 중학교 때부터 활용해오던 그래프를 그리는 매우 훌륭한 방법에 속한다. 따라서 그래프를 그리는 방법을 다음과 같이 기억하자.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.

② 도함수 $f'(x)$를 구한다.

③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.

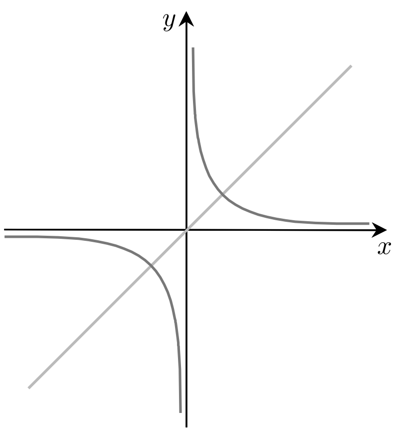
일단 위의 방법을 읽으면 ①에서 의문이 생기는데 몇 가지 예를 들어 그래프를 그려보면서 이야기를 풀어나가도록 하자.

먼저 유명한 초월함수인 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리면서 더하기 함수를 알아보자.

함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$을 처음 딱 보면 어렵다는 생각을 하겠지만

대부분의 함수는 "아는 함수의 사칙연산 혹은 합성"으로 구성되어 있다.

따라서 $y=x+\dfrac{1}{x}=(x)+\left(\dfrac{1}{x}\right)$로 생각할 수 있고 그림과 같이 두 함수 x, $\dfrac{1}{x}$를 따로 따로 그린 후 실제로 두 함수를 직접 더하면서 그래프를 대략적으로 추측해볼 수 있다.[1)]



1) 함수를 어떻게 더하지? 라고 생각할 수 있는데 단순히 숫자 대입이다.

예를 들어 $y=x+\dfrac{1}{x}$에

$x=1$을 대입하면 $(1)+\left(\dfrac{1}{1}\right)$

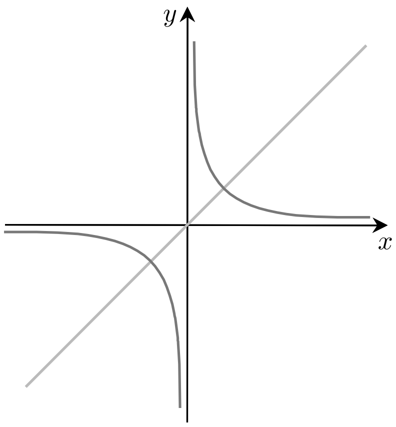
$x=2$를 대입하면 $(2)+\left(\dfrac{1}{2}\right)$

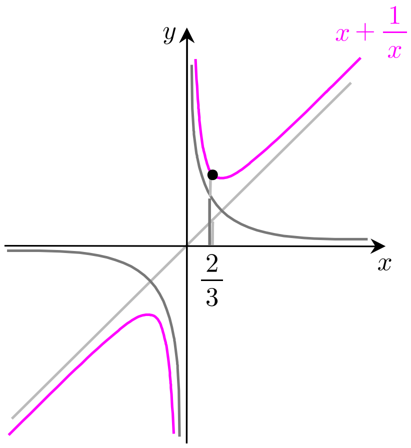
$x=3$을 대입하면 $(3)+\left(\dfrac{1}{3}\right)$

…

이 된다는 것을 적극 활용해서 그래프의 개형을 추론하는 것이다. 조금만 연습하면 금방 숙달시킬 수 있다.

Annotation





오른쪽 그림과 같이 $\frac{2}{3}$를 직접 대입했다고 생각하면 $\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)$이므로 두 함숫값을 그림과 같이 직접 더해서 점을 찍어 주면 된다.

이 같은 행위를 계속해서 반복하면 오른쪽의 그래프인 $x+\frac{1}{x}$의 그래프를 대략적으로 그려낼 수 있다. 여기서 주의할 것은 점근선을 대입하면서 자연스럽게 파악할 수 있다는 것인데 x에 점점 큰 값을 대입하면 $\frac{1}{x}$은 점점 0에 가까워 지므로 x보다 매우 약간만 큰 함숫값을 가지게 된다는 것이다. 따라서 $y=x$가 점근선임을 알 수 있다. 또한 양수 x를 점점 0에 가깝게 대입하다보면 x가 점점 사라져서 $\frac{1}{x}$이 점근선임을 알 수 있다.[1)]

이처럼 **한 점씩 직접 대입한다는 생각으로 더하기 함수를 직접 그리면 점근선 또한 그래프를 그리는 과정에서 바로 추론 할 수 있고 대략적인 그래프의 개형까지 완성할 수 있다.** 하지만 여기까지는 **정확한 논리가 아닌 숫자를 통한 추론에 불과하므로 반드시 미분을 통해 확인과정을 거쳐야 한다.**

미분해보면 $y'=1-\frac{1}{x^2}$이므로 $x>0$인 구간에서 도함수 $1-\frac{1}{x^2}$의 부호[2)]를 생각해보면 $(0,\ 1)$에서 음수, $(1,\ \infty)$에서 양수이므로 $x=1$에서 극소를 가지는 것을 알 수 있고 앞서 더하기 함수를 통해 추론했던 그래프가 거의 정확한 것까지 알 수 있다. 즉 함수 $x+\frac{1}{x}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림이 맞고 극점 $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$까지 미분을 통해 정확하게 알아낼 수 있다.

1) 극한으로 표현하면 다음과 같이 이해할 수 있다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)≒x$

$\lim\limits_{x\to+0}\left(x+\frac{1}{x}\right)≒\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)≒\infty$

(lim 에 ≒와 같은 표현은 수학적으로 올바르지 않지만 위의 식을 직관적으로 이해하기에 큰 문제는 없을 것이다.)

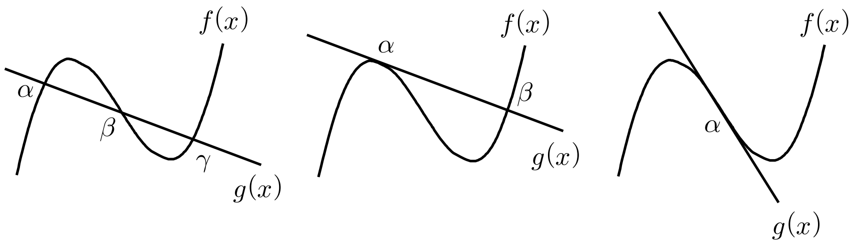
2) 도함수는 부호만 중요하므로 $1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$이라 생각해보면 분모 x^2은 부호에 영향을 주지 않으므로 x^2-1만 생각해보면 쉽다. 이렇게 **부호에 영향을 주지 않는 것을 무시하는 방법은 초월함수의 미분법에서 매우 자주 활용되니 완벽하게 숙지해두자.**

기본개념완성

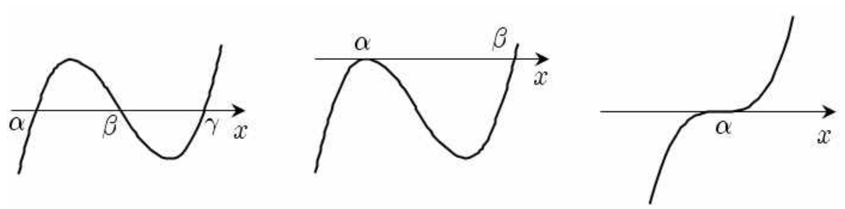
Annotation

이제 **빼기 함수**에 대하여 알아보자.

① 빼기 함수는 다항함수에서 자주 활용된다.



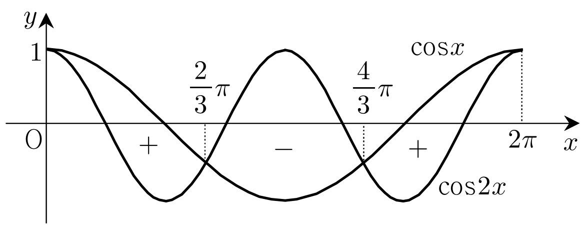
→ 빼기 함수 $f(x)-g(x)$의 그래프 그리기



그림과 같이 단순히 함숫값을 직접 뺀다고 생각하고, $f(x)-g(x)$ 또한 삼차함수라는 것을 생각해주면 어렵지 않게 그래프를 그릴 수 있다. 이와 같은 원리를 활용하면 이차함수, 삼차함수, 사차함수 … 등의 모든 다항함수에 대하여 빼기 함수 그래프를 그릴 수 있을 것이다.

② 빼기 함수는 도함수의 부호를 판정할 때 매우 유용하다.

초월함수 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$의 그래프를 그린다고 해보자. 도함수를 찾으면
$f'(x)=2(\cos x-\cos 2x)$인데 도함수의 부호를 판단하기가 만만치 않다.
여기서 함수 $\cos x$와 $\cos 2x$를 각각 그려서 뺀다고 생각하면 다음과 같이
도함수의 부호를 판단할 수 있게 된다.



또한

$$f'(x)=2\cos x-2\cos 2x=2\cos x-2(2\cos^2 x-1)=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

이므로 $\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $\cos x$와 $\cos 2x$의 교점의 x좌표 까지 구할 수 있다.

이처럼 다항함수에서 빼기 함수의 그래프를 그릴 때, 초월함수에서 도함수의 부호를 판정할 때 "빼기 함수"를 적극적으로 활용하면 된다. 하지만 일반적으로 $y=x-\frac{1}{x}$와 같은 그래프를 그릴 때에는 빼기 함수가 아닌 $y=(x)+\left(-\frac{1}{x}\right)$라 생각해서 앞서 배운 더하기 함수로 그래프를 그리는 것이 편하다.

따라서 **더하기 함수**와 **빼기 함수**에 대해서는 다음과 같이 정리하면 된다.

더하기 함수와 빼기 함수, $f(x)\pm g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

① 도함수의 부호 판정이나 다항함수의 빼기 함수가 필요한 경우가 아니면 더하기 함수로 해석하는 것이 편한 경우가 많다.

② 잘 아는 함수 $f(x)$와 $\pm g(x)$의 그래프를 그린다.

③ 두 함수에 직접 $x=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ 등을 대입한다는 심정으로 직접 함숫값을 더하면서 그래프의 대략적인 개형을 완성한다.

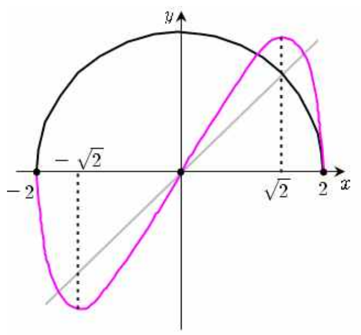
④ 도함수 $f'(x)\pm g'(x)$의 부호를 통해서 그래프의 증감을 정확히 한다.

기본개념완성

이제 곱하기 함수, 나누기 함수 그래프 그리기에 대하여 배워보자.

일단 나누기 함수는 $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\left(\frac{1}{g(x)}\right)$이므로 항상 곱하기 함수로 해석해서 그래프를 그릴 수 있으므로 곱하기 함수에 대해서만 정확하게 알아두면 된다.

예를 들어 $x\sqrt{4-x^2}$의 그래프를 그려보자.



그림과 같이 x와 $\sqrt{4-x^2}$의 그래프를 그린 후 **두 함수의 함숫값이 0이 되는 점을 먼저 표시한다.** 다음 구간 $(-2,\ 0)$에서는 양수 곱하기 음수로 음수가 되고 $(0,\ 2)$에서는 양수 곱하기 양수로 양수가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 대략적인 개형은 위의 그래프와 같이 완성할 수 있다. 이처럼 곱하기 함수의 경우 **함숫값이 0이 되는 점과 부호만 판정할 수 있으면 매우 쉽게 그래프의 개형을 그려낼 수 있다.** 1) 미분을 통한 정확한 추론 – 반드시 읽기

Annotation

1) 곱하기를 통해 대략적인 그래프의 개형을 추론한 후 미분을 통해 반드시 확인과정을 거쳐야 한다.

$\left(x\sqrt{4-x^2}\right)'=$

$\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$

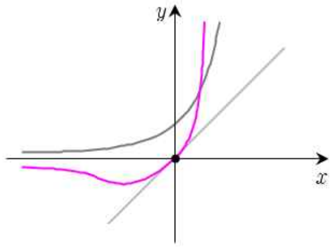
인데 도함수의 부호만 중요하기 때문에 다음과 같이 식을 변형하자.

$\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\{(4-x^2)-x^2\}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)2(2-x^2)$

따라서 $2-x^2$만 보고 부호를 판정하면 되므로 $x=\pm\sqrt{2}$에서 극대, 극소를 가지는 것을 쉽게 알아낼 수 있다. 이처럼 도함수의 부호에 집착하는 연습을 반드시 해야 한다. 그렇지 않고 도함수 자체를 살피려하면 도함수가 너무 어려워서 멘탈이 무너질 것이다.

이번에는 $y=xe^x$의 그래프를 그려보자.



먼저 함숫값이 0이 되는 점을 찾아보면 $x=0$밖에 없다. 즉, $(0,0)$을 표시한 후에 부호를 살펴보면 $(-\infty,0)$에서는 음수, $(0,\infty)$에서는 양수인 것을 알 수 있다. $(0,\infty)$인 구간에서는 $x\to\infty$이면 두 함수 x와 e^x 모두 ∞로 가서 걱정 없이 무한대로 발산하는 그래프를 그려주면 된다. 하지만 $(-\infty,0)$에서 $x\to-\infty$일 때 생각해보면 x는 $-\infty$로 발산하지만 e^x는 $+0$으로 수렴하게 된다. 이렇게 ±0으로 가는 함수와 $\pm\infty$로 발산하는 함수가 곱해지면 결과 값이 ±0으로 갈지 $\pm\infty$로 갈지 판단을 해줘야한다. 즉 위의 그래프에서 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=-0$ or $-\infty$ 임을 판단해줘야 하는데 다음과 같이 힘의 세기를 기억하고 있자.[1]

$$e^x > \cdots > x^2 > x > \sqrt{x} > \cdots > \ln x$$

따라서 x보다 e^x의 힘이 더 세므로 e^x의 0이 우세하기 때문에 $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ 이 된다. 즉 $(-\infty,0)$인 구간에서는 음수이면서 0으로 수렴하는 그래프의 개형을 그려주면 된다. 2) 미분을 통한 정확한 추론 – 반드시 읽기

마찬가지로 $x\ln x$와 같은 그래프를 그릴 때에도 $+0$으로 갈 때 $(+0)\times(-\infty)$ 형태이므로 판단을 해줘야 하는데 다항함수인 x의 힘이 더 세므로 음수이면서 0으로 수렴한다는 것을 알 수 있다.[3]

위의 두 가지 예를 통해 곱하기 함수 그리는 방법을 정리해보면 다음과 같다.

곱하기 함수와 나누기 함수, $f(x)\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

> ① **$f(x)$와 $\left(\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)\right)$의 함숫값이 0이 되는 점을 모두 표시한다.**
> ② **각 구간에서 부호를 판정해서 그래프를 그린다. 예를 들어 $f(a)=f(b)=0$ 이고 (a,b)에서 양수면 그냥 위로 볼록하게 일단 그린다.**
> ③ **미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.**
> ④ **$(\pm0)\times(\pm\infty)=(\pm0)$ or $(\pm\infty)$을 판정할 때, 힘의 세기를 고려한다.**

Annotation

1) 힘의 세기라는 표현은 수학적으로 훌륭한 표현은 아니지만 직관적으로 이해하기에 좋으므로 일단은 이렇게 공부하도록 하자.

2) xe^x을 미분하면 $e^x+xe^x=e^x(1+x)$인데 도함수의 부호만 판단하면 되므로 e^x는 무시하고 생각해주면 된다. 따라서 $(-\infty,-1)$에서 감소하고 $(-1,\infty)$에서 증가하는 것을 알 수 있고, -1에서 극소를 가지는 것을 알 수 있다.

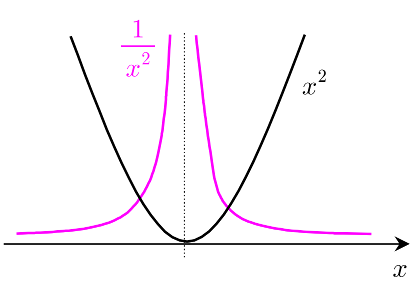
3) 이 부분에 대해서 일단은 증명보다는 직관적으로 e^x가 훨씬 빨리 무한대로 가고 $\ln x$가 느린 속도로 무한대로 간다는 것을 생각해주는 것이 좋다.

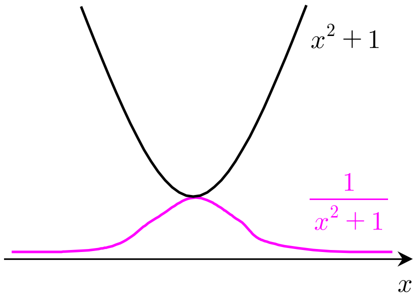
Annotation

마지막으로 나누기 함수의 예를 몇 가지만 들어보자.

예를 들어 $\dfrac{e^x}{x}$와 같은 그래프를 그릴 때에는 e^x와 x를 그려서 직접 나누는 것이 아니라 e^x와 $\dfrac{1}{x}$를 그린 후 곱한다고 생각하면 된다.

하지만 $\dfrac{e^x}{x^2}$나 $\dfrac{x}{x^2+1}$같은 경우 $\dfrac{1}{x^2}$과 $\dfrac{1}{x^2+1}$의 그래프를 그릴 수 있어야 하므로 두 그래프의 개형을 알아보면 다음과 같다.

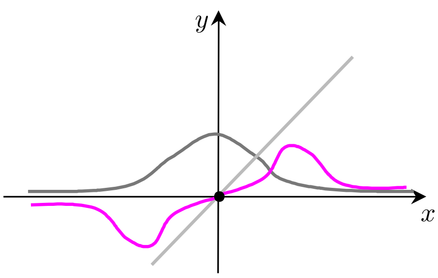




그림과 같이 $\dfrac{1}{f(x)}$의 그래프의 개형을 그릴 때 $f(x)$의 그래프를 그린 후 한 점씩 대입하면서 $\dfrac{1}{f(1)}$, $\dfrac{1}{f(2)}$ $\cdots$ 등의 점을 표시해보면 그래프의 개형을 어느 정도 완성할 수 있다. 물론 미분을 해서 더 정확하게 그릴수도 있다.

또한 역수그래프를 그릴 때에는 $f(x)$와 $\dfrac{1}{f(x)}$의 교점의 y좌표는 항상 ± 1이 된다는 것 정도는 자연스럽게 알 수 있고 실제 수능에서도 한 번 출제된 적이 있다.[1)]

마지막으로 나누기 함수를 통해서 $\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프를 그려본 후 **사칙연산과 그래프 그리기**를 마무리하도록 하자.



$x\times\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$에서 함숫값이 0이 되는 $(0,\ 0)$을 표시한다. 이후 $(0,\ \infty)$에서는 양수라는 것을 알 수 있는데 $(+\infty)\times(+0)$이므로 직접 극한으로 판단해줘야 한다. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$이므로 위와 같이 완성할 수 있다.[2)3)]

1) $f(x)=\dfrac{1}{f(x)}$에서 $f(x)=\pm 1$임을 알 수 있다.

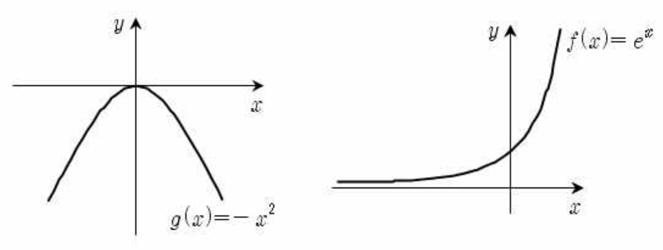
2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$라 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다. 따라서 $(0,\ \infty)$구간의 그래프를 원점 대칭이동하여 그래프를 완성하는 방법도 있다.

3) 주어진 식을 미분해보면 $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$인데 도함수의 부호만 중요하므로 양수가 되는 분모는 무시하고 $1-x^2$만으로 부호를 따져보면 ± 1에서 극대, 극소를 가진다는 것을 알 수 있다.

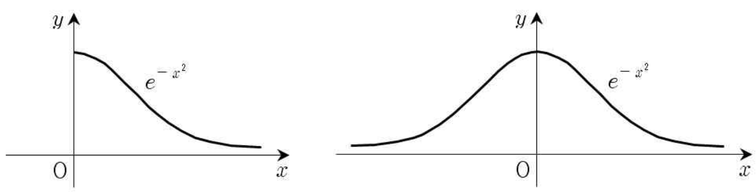
Annotation

사실 앞서 배운 사칙연산 그래프에 대한 이론은 이론이 아니라 중학교 때부터 해오던 $x=1,\ x=2\ \cdots$ 을 대입해서 모눈종이에 점을 찍던, 그 이론이라 생각하면 된다. 한 점씩 대입해서 직접 함숫값으로 그래프를 추론한 후에 미분으로 그래프의 개형을 "논리적으로" 완성한다고 생각하면 된다.

이제 합성함수의 그래프도 몇 가지만 그려보자. 교과서 대표 예제로 있는 함수 e^{-x^2}의 그래프는 우리가 잘 알고 있는 함수의 사칙연산으로 표현이 되지 않는다. 하지만 $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2$이라 하면 두 함수의 합성으로 표현할 수 있다. 따라서 두 함수를 따로 따로 그린 후 사칙연산 그래프와 마찬가지로 한 점씩 직접 대입하면서 그래프를 추론하면 된다.



합성함수 $f(g(x))$에서 가장 중요한 것은 g의 치역이 다시 f의 정의역이 된다는 것이다. 위의 $g(x)$의 그래프에서 x에 $0,\ 1,\ 2\ \cdots$를 하나하나 대입해보면 치역이 0부터 시작해서 점점 작아져서 $-\infty$로 가는 것을 알 수 있다.
이 치역이 다시 $f(x)$의 정의역이 되면 1부터 시작해서 점점 $+0$으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 $(0,\ \infty)$인 구간에서 e^{-x^2}의 그래프를 대략적으로 그려보면 왼쪽 그림과 같다.



또한 $f(g(x))=f(g(-x))$이므로 e^{-x^2}은 y축에 대하여 대칭인 것을 알 수 있으므로 오른쪽 그림과 같이 그래프의 개형을 완성할 수 있다.[1)]

이처럼 합성함수 또한 한 점씩 대입하는 것을 활용해서 그래프의 개형을 추론한 후에 미분을 통해서 정확한 그래프의 개형을 확인하는 것이 좋다.

1) 직접 e^{-x^2}의 도함수, 이계도함수를 찾아서 극점의 위치와 변곡점의 위치를 정확히 확인하고 합성함수로 추론한 개형이 정확한지 확인하도록 하자.

여기까지 **"사칙연산과 그래프 그리기" "합성함수와 그래프 그리기"**를 배웠다.
이 내용은 사실은 중학교 때 배운 한 점씩 대입하는 원리에서 오는 것임을 알아두고 아무리 어려운 그래프가 나와도 한 점씩 대입하는 방법은 절대 무너지지 않는 좋은 방법임을 알아두자. 아래의 총 정리를 읽어보고, 오른쪽 대표 예제 그래프를 하나도 빠짐없이 모두 그려본 후에 넘어가도록 하자.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.
② 도함수 $f'(x)$를 구한다.
③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.[1]

더하기 함수와 빼기 함수, $f(x) \pm g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법[2]

① 도함수의 부호 판정이나 다항함수의 빼기 함수가 필요한 경우가 아니면 더하기 함수로 해석하는 것이 편한 경우가 많다.
② 잘 아는 함수 $f(x)$와 $\pm g(x)$의 그래프를 그린다.
③ 두 함수에 직접 $x=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ 등을 대입한다는 심정으로 직접 함숫값을 더하면서 그래프의 대략적인 개형을 완성한다.
④ 도함수 $f'(x) \pm g'(x)$의 부호를 통해서 그래프의 증감을 정확히 한다.

곱하기 함수와 나누기 함수, $f(x) \overset{\times}{\underset{\div}{}} g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법[3]

① $f(x)$와 $\left(\overset{\times}{\underset{\div}{}} g(x)\right)$의 함숫값이 0이 되는 점을 모두 표시한다.
② 각 구간에서 부호를 판정해서 그래프를 그린다. 예를 들어 $f(a)=f(b)=0$이고 $(a,\ b)$에서 양수면 그냥 위로 볼록하게 일단 그린다.
③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.
④ $(\pm 0)\times(\pm\infty)=(\pm 0)$ or $(\pm\infty)$을 판정할 때, 힘의 세기를 고려한다.

합성함수 $f(g(x))$의 그래프를 그리는 방법[4]

① $g(x)$와 $f(x)$의 그래프의 개형을 각각 그린다.
② g의 치역이 f의 정의역이 되는 것을 생각하면서 한 점씩 대입해서 그래프의 개형을 추론한다.
③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.

Annotation

1) 여기서 도함수의 그래프가 중요한 것이 아니라 <u>도함수의 부호만 중요하다는 것을 명심</u>해야 한다.

2) 대표 예제
$x+\frac{1}{x}$, e^x+x, $x+\sqrt{1-x^2}$

3) 대표 예제
$\frac{x}{x^2+1}$, $x\sqrt{4-x^2}$,
$x\sqrt{10-x}$ xe^x, x^2e^x, $\frac{e^x}{x}$
$x\ln x$, $x^2\ln x$, $\frac{\ln x}{x}$

4) 대표 예제
$\ln(x^2+1)$, e^{-x^2}

기본개념완성

STEP1 교과서 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보자. … 1)

방정식 $\ln x = kx$의 실근의 개수를 $f(k)$라 하자.

(1) 곡선 $\ln x$와 직선 kx의 그래프를 활용해서 $f(k)$의 그래프를 완성하시오.

(2) 곡선 $\frac{\ln x}{x}$와 직선 k의 그래프를 활용해서 $f(k)$의 그래프를 완성하시오.

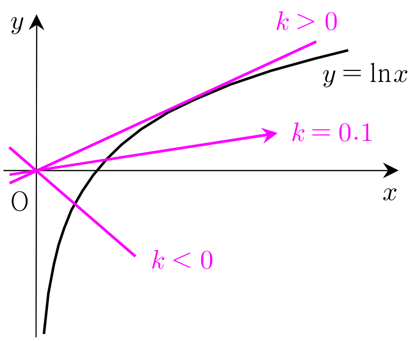
STEP2 수능 수준의 문제에 Critical Point를 적용해보고 교과서 수준의 문제와 비교해서 풀이의 공통성에 대하여 스스로 생각해보자. … 2)

실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]

먼저 STEP1의 (1)과 (2)의 문제를 풀면서 각 풀이의 장단점을 파악해보고 어떤 풀이가 본인에게 잘 맞는지 생각해보자.

<STEP1의 풀이>

(1) 교점 개수를 찾기 위해 그림과 같이 k가 $-\infty$로부터 차근차근 커진다고 생각해보자. $y = \ln x$의 그래프의 개형을 쉽게 그릴 수 있기 때문에 $k < 0$에서 교점이 한 개라는 것을 쉽게 알 수 있다.



또한 $k = 0$일 때에는 여전히 교점이 1개이지만 $k = 0.1$과 같이 양수가 되는 순간 화살표를 따라가면 언젠가 곡선 $y = \ln x$과 한 번 더 만나서 교점이 2개가 된다. k를 계속해서 더 크게 만들면서 그래프를 그려보면 결국 그림과 같이 접하는 순간에 교점이 1개이고 더 커지면 교점이 없어지는 것을 알 수 있다.

즉 **이 문제는 교점의 개수 문제이지만 결국은 "접선 문제"인 것을 알아야 한다.**

Annotation

1) 정답 :

$(-\infty, 0]$에서 $f(k)=1$

$\left(0, \frac{1}{e}\right)$에서 $f(k)=2$

$k=\frac{1}{e}$에서 $f(k)=1$

$\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 $f(k)=0$

*이 문제가 풀리지 않는다면 다시 한완수 전 단계인 교과서 공부로 돌아가셔서 완벽히 공부하고 오셔야 합니다.

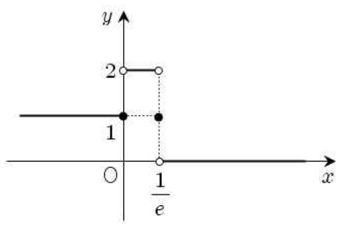
2) 정답 : 15/4

*자세한 해설은 향후 기출문제를 모아서 풀 때 볼 수 있다.

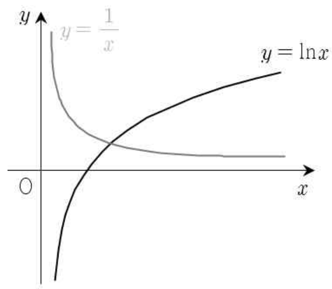
$(0,\ 0)$에서 $y=\ln x$에 그은 접선을 찾아야 하므로 $(t,\ \ln t)$에서의 접선

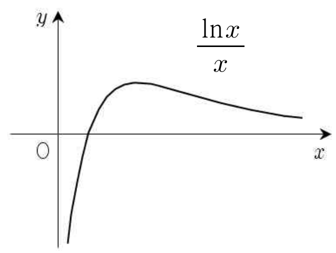
$$y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$$

을 도입하자. $(0,\ 0)$을 대입하면 $\ln t-1=0$에서 $t=e$임을 알 수 있다. $t=e$를 다시 대입하면 접선 $y=\frac{x}{e}$를 찾을 수 있다. 따라서 $k=\frac{1}{e}$일 때 교점이 1개인 것을 알 수 있고 $f(k)$의 그래프를 완성하면 다음과 같다.



(2) $\frac{\ln x}{x}$의 그래프를 그려야 문제를 해결할 수 있다. 따라서 (1)에서 $\ln x$를 그리는 것 보다 일단 난이도가 높다. $\frac{\ln x}{x}=\ln x\times\left(\frac{1}{x}\right)$이므로 $\ln x$와 $\frac{1}{x}$을 그린 후 두 함수를 곱하면 된다.





왼쪽 그림에서 알 수 있듯이 함숫값이 0이 되는 점은 $(1,\ 0)$뿐이다. 점 $(1,\ 0)$을 표시한 후에 $(1,\ \infty)$에서는 양수, $(0,\ 1)$에서는 음수임을 알 수 있고 $+0$으로 가는 값을 살펴보면 $(+\infty)\times(-\infty)=(-\infty)$이고 $+\infty$로 가는 값을 살펴보면 $(+\infty)\times(+0)$이므로 힘의 세기를 따져보면 다항함수 출신인 $\frac{1}{x}$가 더 세므로 $(+\infty)\times(+0)=(+0)$임을 알 수 있다. 따라서 오른쪽 그래프의 개형을 완성할 수 있다. 이렇게 곱하기 함수로 추론한 개형을 논리적으로 확인하기 위해 미분해보자. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$에서 $1-\ln x$만 부호에 영향을 준다. 따라서 $x=e$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 가지는 것을 알 수 있으므로 $f(k)$의 개형을 쉽게 완성할 수 있다.

<STEP2의 풀이>

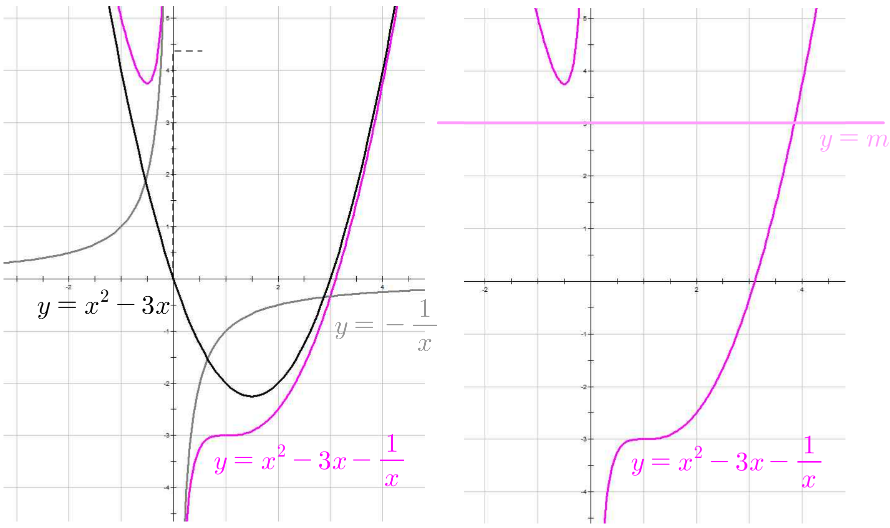
$(0,\ 2)$를 지나는 직선은 $y=mx+2$이므로

$x^3-3x^2+1=mx+2$에서 $x^3-3x^2-1=mx$, $x^2-3x-\dfrac{1}{x}=m$이므로

$y=x^2-3x-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그려보자. [1]

그래프를 그리기 위해서 왼쪽과 같이 $(x^2-3x)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)$이라 생각한 후 두 그래프를 그린 후 더하면서 대략적인 개형을 추측하자.[2] 또한 미분해보면

$y'=2x-3+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극소를 가지고 $x=0$이 점근선이 되는 것을 알 수 있고 그래프는 오른쪽과 같이 그려진다.



또한 극솟값이 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{15}{4}\right)$인 것을 알 수 있으므로 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$이다.

STEP1 문제의 경우 (1)의 풀이는 $\ln x=kx$ 자체로 분석하면 **"접선 문제"**가 되고 $\dfrac{\ln x}{x}=k$ 로 분석하면 **"그래프의 개형 문제"**가 된다.

STEP2 문제도 마찬가지로 $x^3-3x^2+1=mx+2$ 자체로 분석하면 **"접선 문제"**가 되었고 $x^2-3x-\dfrac{1}{x}=m$ 으로 분석하면 **"그래프의 개형 문제"**가 된다.

두 풀이에는 모두 각각 장단점이 있다. 접선문제로 풀게 되면 접선을 찾아야 한다는 단점이 있고 교점의 개수가 명확하게 눈에 안 들어오는 경우가 있기 때문에 어느 정도 직관을 동원해서 교점의 개수를 판단해야 한다.[3] 하지만 그래프의 개형으로 문제를 풀게 되면 그래프의 개형을 그리는 것이 조금 더 어려워지고 교점의 개수는 명확하게 알 수 있다. 따라서 **두 풀이 모두 숙지해두고 상황에 따라 풀이를 잘 선택하는 능력을 길러야 한다.**

Annotation

1) $x=0$은 대입해보면 절대 근이 될 수 없다.

2) 두 함수 x^2-3x, $-\dfrac{1}{x}$의 그래프가 함수 $x^2-3x-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리기 위한 보조선이라고 생각하면 된다.

3) 실제로 STEP2의 문제에 대하여 접선 단원에서 푼 풀이를 보면 변곡점에서 접할 때 교점이 계속 1개라는 것을 논리적으로 판단하는 것은 힘든 일이다. 어느 정도의 직관에 동원된다.

Annotation

마지막으로 다음 몇 가지 함수들에 대하여 **도함수의 부호에 집착하는 연습**을 하고 문제로 넘어가도록 하자.

다음 함수의 도함수를 구해서 x값에 따른 부호를 조사하시오.

(1) x^2e^x

(2) $x\sqrt{4-x^2}$

(3) $\dfrac{x-1}{(x-1)^2+1}$

(4) $x\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}$

(5) $\dfrac{1}{2}x-\ln(x^2+1)$

(6) $\dfrac{\ln x}{x^2}$

(7) $x\sqrt{10-x}$

(1) $2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$이므로 e^x가 아닌 이차함수 x^2+2x로 도함수의 부호를 판정하면서 원함수의 그래프를 그리면 된다. 즉, 핵심은 이차함수 x^2+2x

(2) $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}(2-x^2)$ $\rightarrow$ $2-x^2$의 부호 조사

(3) $\dfrac{(x-1)^2+1-2(x-1)^2}{\{(x-1)^2+1\}^2}=\dfrac{2x-x^2}{\{(x-1)^2+1\}^2}$ $\rightarrow$ $-x^2+2x$의 부호 조사

(4) $\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}+\dfrac{x(x-2\sqrt{2})}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}}$

$=\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+1}}\right)(2x^2-6\sqrt{2}x+9)$ $\rightarrow$ $(\sqrt{2}x-3)^2$의 부호 조사[1)]

1) $2x^2-6\sqrt{2}x+9$
$=(\sqrt{2}x-3)^2$

Annotation

(5) $\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+1}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(x^2-4x+1)$ → x^2-4x+1의 부호조사

(6) $\frac{x-2x\ln x}{x^4}$ → $x(1-2\ln x)$의 부호조사

(7) $\sqrt{10-x}+\frac{-x}{2\sqrt{10-x}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{10-x}}\right)(20-3x)$ → $20-3x$의 부호조사

위의 문제풀이에서 볼 수 있듯이 **아무리 복잡한 함수가 출제되더라도 부호에 집착하면 반드시 원함수의 증감을 파악할 수 있게 출제됨을 명심**하자.

도함수에서 중요한 것은 도함수 자체의 그래프의 개형이 아니라 부호이다.

초월함수의 그래프의 개형을 그리는 방법

① 함수 $f(x)$의 형태를 보고 사칙연산이나 대입, 합성함수 등을 통해 대략적인 그래프의 개형만 추론한다.

② 도함수 $f'(x)$를 구한다.

③ $f'(x)>0$인 구간에서는 $f(x)$가 증가, $f'(x)<0$인 구간에서는 $f(x)$가 감소한다는 성질을 활용해서 원함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 더 정확히 그린다.

→ 도함수에서 중요한 것은 도함수의 그래프가 아니라 도함수의 부호이다.

(+) (-) 함수 그리기[1]

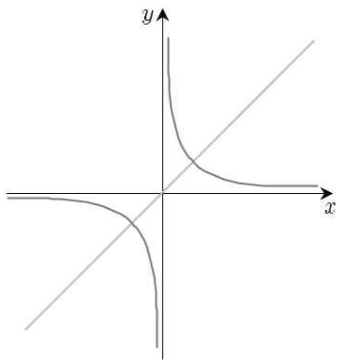
① 접선의 기울기도 같이 (+)(-) 가 된다. : $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

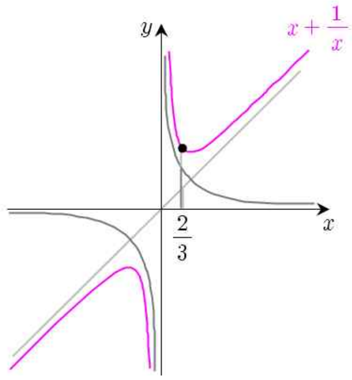
② (-) 함수는 (+) 함수로 생각할 수 있다. : $f(x)-g(x)=f(x)+\{-g(x)\}$

③ 양수/음수 부호가 중요 할 때는 (-)함수로 생각 : 예를 들어 도함수의 그래프

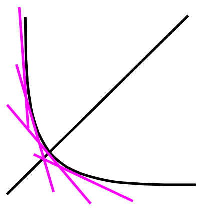
초월함수에서 배웠던 사칙연산 그래프를 좀 더 논리적으로 자세하게 배워보자. **이 부분은 전혀 고교과정을 넘지 않는 그래프에서 매우 중요한 부분을 차지하므로 완벽하게 알아두자.** 몇 가지 그래프로 예를 들어 공부해보자.

먼저 $y=x+\dfrac{1}{x}$을 그리기 위해 $y=x$와 $y=\dfrac{1}{x}$을 그려보면 왼쪽 그림과 같이 된다.





또한 오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 $\dfrac{1}{x}$의 함숫값(회색 선분)과 x의 함숫값(파랑 선분)을 더하면서 (+) 그래프를 그려보자. 여기서 정의역 x가 양수에서 0에 가까워질수록 x의 함숫값은 점점 0이 되고 $x+\dfrac{1}{x}$의 그래프에 거의 영향을 주지 않게 되므로 주어진 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$을 따라가게 된다.[2] (점근곡선이 된다.) 마찬가지로 x가 ∞로 갈 때 $\dfrac{1}{x}$의 함숫값은 점점 0이 되므로 $x+\dfrac{1}{x}$의 그래프에 거의 영향을 주지 않으므로 $y=x$를 따라가게 된다(점근선이 된다). 즉 오른쪽과 같은 그래프가 되게 되는데 $x=1$ 에서 둘의 함숫값이 1로 같은 값을 가지므로 $x+\dfrac{1}{x}$는 그 두 배인 2라는 함숫값을 가지고 이 점이 바로 극소가 된다. 그 이유를 개념 ①을 통해 알아보자.



왼쪽 그림에서 보듯이 $y=\dfrac{1}{x}$의 접선의 기울기는 x값이 커질수록 점점 커지게 되는데 $y=x$의 접선의 기울기는 항상 1이다. 구간 $(0,1)$에서는 두 기울기를 더해보면 그 값이 음수이므로 함수 $x+\dfrac{1}{x}$은 계속해서 감소하다가 $x=1$일 때

1) CP에서 공부했던 초월함수에 대하여 완벽히 공부한 후에 이 특강을 공부해야 한다.

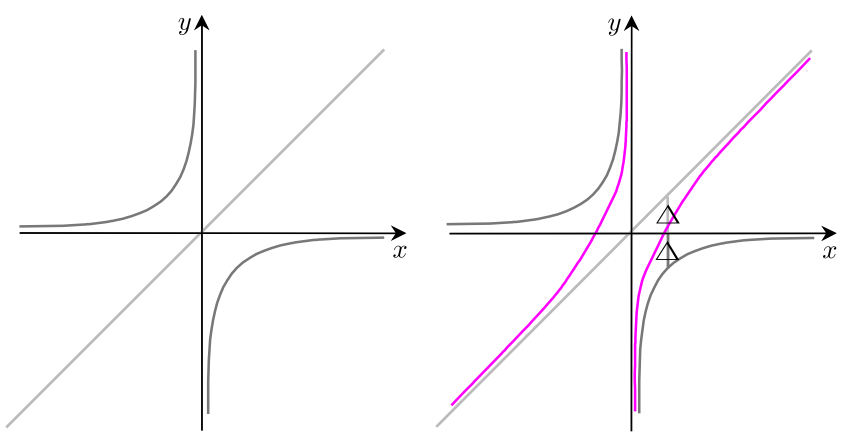
2) 정확하게는 $x>0$이므로 $\dfrac{1}{x}$의 위를 따라가게 된다. 왜냐하면 $x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{x}$이기 때문이다.
또한 점근선은 직선에 대해서만 정의하므로 $\dfrac{1}{x}$는 '점근곡선'이라고 부르기로 약속하자.
앞으로 점근곡선과 점근선을 모두 점근선이라고 서술하겠다. 하지만 점근선은 반드시 직선에 대해서만 정의함을 명심하자.

$y=\dfrac{1}{x}$의 접선의 기울기가 -1이 되므로 극소를 가지게 되고 $x=1$ 이후에 기울기를 더한 값이 양수이므로 다시 증가하게 된다는 것을 알 수 있다.
이처럼 (+) 함수를 그릴 때 함숫값도 더해지지만 항상 그 점에서의 접선의 기울기도 같이 더해지므로 증가함수인지 감소함수인지 또 어느 점이 극점인지 쉽게 파악할 수 있다.[1)]

주어진 그래프에서는 $y=\dfrac{1}{x}$이 $y=x$에 대해 대칭인 그래프이므로 $x=1$에서 접선의 기울기가 명백히 -1이므로 $x=1$ 직전까지는 감소하다가 $x=1$에서 극소를 가지고 $x=1$이후에 증가한다는 것을 알 수 있다. 그런데 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$라 할 때 $f(-x)=-f(x)$이므로 기함수임이 확인되므로 원점 대칭하여 $x<0$인 부분의 그래프를 완성 시킬 수 있다.

또한 미분을 활용해서 극점의 위치를 정확하게 찾아야 한다. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$을 미분해보면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$에서 $f'(x)=0$을 정리하면 $x=1$, $x=-1$이므로 극소의 좌표는 $(1,2)$가 되고 극대의 좌표는 $(-1,-2)$가 된다. 이처럼 덧셈 그래프를 이용해서 먼저 그래프를 그린 후에 미분을 이용해서 극점을 찾을 수 있다.
이처럼 어떠한 함수를 봤을 때 미분부터 하는 습관을 버려야 한다.[2)] 여기서 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$라 하면 산술평균, 기하평균을 이용해서 극소의 좌표를 찾을 수도 있다. $x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$으로 상수이므로 $x=\dfrac{1}{x}$ 즉 $x=1$일 때 최솟값 2를 가지게 된다.[3)]

이번에는 $x-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 그리면서 이해해보자. 빼기 함수의 그래프는 대부분 더하기 함수로 해석하는 것이 좋다. 즉 $x-\dfrac{1}{x}=x+\left(-\dfrac{1}{x}\right)$로 해석하여 (+)함수를 이용해서 그려보자.



1) 그것이 결국 $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ 이라는 내용을 활용한 것이다. 더하기 함수 그래프를 그리면서 기울기까지 같이 더하기 해주면 "추론"이 거의 "논리"에 가까워진다. 즉 그래프가 매우 정확해진다.

2) 미분이 안 좋다는 것이 아니고 함숫값을 미리 하나하나 대입해서 대략적인 개형을 예측해본 후 미분하라는 것이다.

3) 원점 대칭이므로 $x<0$에서는 최댓값 -2를 가지게 된다.

오른쪽 그림과 같이 $x>0$에서 둘의 함숫값이 정확히 부호만 반대일 때, 두 함숫값을 더하면 0이므로 x축과 만나게 된다.[1] 여기서 정의역 x가 양수에서 0에 가까워질수록 x의 함숫값은 점점 0에 가까운 매우 작은 양수가 되므로 $x+\left(-\frac{1}{x}\right)$의 그래프에 거의 영향을 주지 않게 되므로 주어진 그래프는 $\left(-\frac{1}{x}\right)$의 위를 따라가게 된다.(점근선이 된다.) 마찬가지로 x가 ∞로 갈 때 $\left(-\frac{1}{x}\right)$의 함숫값은 점점 0에 가까운 매우 작은 음수가 되므로 $x+\left(-\frac{1}{x}\right)$의 그래프에 거의 영향을 주지 않으므로 $y=x$의 밑을 따라가게 된다.(점근선이 된다) 또한 $f(x)=x-\frac{1}{x}$일 때 $f(-x)=-f(x)$이므로 기함수임이 확인되므로 원점 대칭하여 $x<0$인 부분의 그래프를 완성 시킬 수 있다.

또한 $x>0$인 구간에서 $y=x$의 접선의 기울기는 항상 1인데 $y=-\frac{1}{x}$의 기울기는 양의 무한대에서 0에 가까운 양수로 점점 작아져 가므로 그 기울기의 합은 양의 무한대에서 1까지 기울기가 점점 작아져 간다. 즉 항상 기울기가 양수이므로 계속해서 증가하는 함수가 된다.

1) 그래프에는 △모양으로 표시되어 있다.

더하기 함수와 빼기 함수, $f(x)\pm g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

① 도함수의 부호 판정이나 다항함수의 빼기 함수가 필요한 경우가 아니면 무조건 $f(x)+(\pm g(x))$로 더하기 함수로 해석하는 것이 편한 경우가 많다.

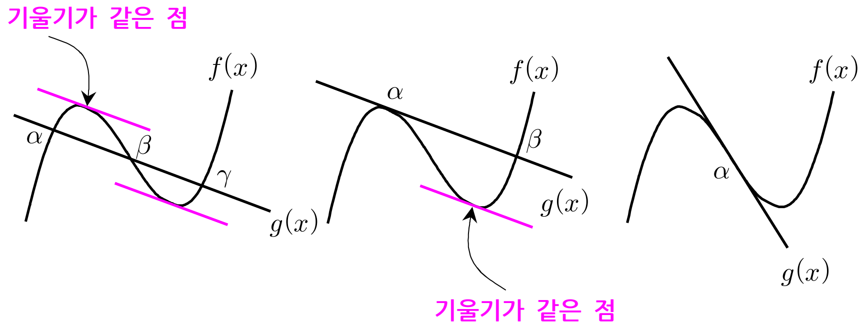
② 잘 아는 함수 $f(x)$와 $\pm g(x)$의 그래프를 그린다.

③ 두 함수에 직접 $x=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ 등을 대입한다는 심정으로 직접 함숫값을 더하면서 동시에 $x=0,\ 1,\ 2\ \cdots$ 에서의 접선의 기울기도 같이 더하면 그래프의 증가, 감소까지 정확하게 추론하면서 그래프를 완성할 수 있다.

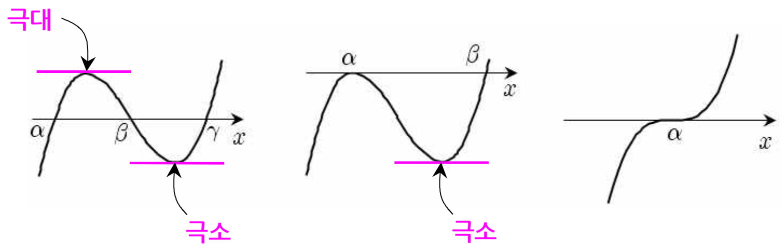
④ 도함수 $f'(x)\pm g'(x)$의 부호를 통해서 그래프의 증감을 엄밀히 한다.[2]

2) 사실 ③의 과정을 완벽하게 했다면 그것이 곧 ④의 과정을 미리 논리적으로 한 것이나 다름없다. 하지만 정확한 확인을 위해 직접 수식으로 확인까지 해주도록 하자.

더하기 함수보다 빼기 함수가 유용한 경우는 주로 다항함수나 도함수의 부호를 판정할 때이다. 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$에 대해서 $f(x)-g(x)$의 그래프를 그려보자.



→ **빼기 함수 $f(x)-g(x)$의 그래프를 그려보자.**[1)]



(-) 함수의 그래프를 그릴 때 기울기도 같이 빼기가 되므로 $g(x)$와 같은 기울기를 가지는 접선에 대한 접점의 x좌표에서 곡선 $f(x)-g(x)$의 기울기가 0이 된다. 따라서

"빼기 함수를 그리기 전에는 $g(x)$와 기울기가 같은 접선이 되었던 점"

$=$

"빼기 함수에서는 기울기가 0인 점, 즉 극대나 극소가 될 수 있는 점"

임을 알 수 있다. 따라서 위 그림처럼 직선 $y=g(x)$와 기울기가 같은 접선과의 접점의 x좌표가 $f(x)-g(x)$의 극점의 x좌표가 된다.

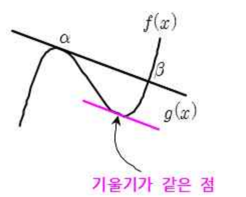
이와 같은 성질을 가운데 그림[2)]에 적용해보면

($f(x)$가 극소가 되는 x좌표) $>$ ($f(x)-g(x)$가 극소가 되는 x좌표)

라는 것을 한 눈에 알 수 있기도 하다.[3)]

1) 함숫값을 직접 빼서 새로운 삼차함수 $f(x)-g(x)$를 그린다 생각하면 쉽다.

2)



3) 가운데에 있는 그래프를 보고 반드시 이해한 후에 넘어가자.

이번에는 변곡점의 위치를 추측해보자. 변곡점의 위치는 $f''(x)-g''(x)$를 조사해야 하는데 일차함수 $g(x)$에 대하여 $g''(x)=0$이므로 일차함수 $g(x)$를 빼도 $f(x)$의 이계도함수에는 영향을 줄 수 없다.[1] 따라서 $f(x)$의 변곡점의 x좌표와 $f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 일치하게 된다. 즉 (+), (−) 함수를 그릴 때 이차 이상의 함수를 더하거나 빼면 변곡점의 위치가 바뀌게 되고 일차이상의 함수를 더하거나 빼면 극점의 위치가 바뀌게 된다.

1) 결국 $f(x)$의 이계도함수와 $f(x)-g(x)$의 이계도함수는 같다는 것을 의미한다.

여기까지 공부한 후 다음 문제를 풀어보자.

다음 함수의 그래프를 더하기 함수를 활용해서 추론하고 미분을 해서 엄밀하게 완성하시오. 또한 극점의 위치를 찾으시오.[2]

(1) $y=x+\sqrt{4-x^2}$ (2) $y=x-\sqrt{4-x^2}$

(3) 함수 $y=\dfrac{16}{x}$의 그래프와 함수 $y=-x^2+a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 a의 값은? [2004]

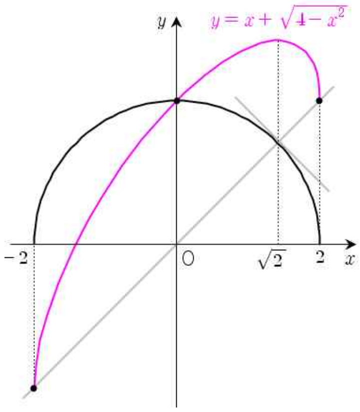
2) (1), (2)는 그래프를 그리고 (3)은 발문 그대로 풀면 됩니다.

<풀이> - 풀이에서 많은 것을 얻을 수 있으므로 반드시 모두 읽어봐야 한다.

(1) x와 $\sqrt{4-x^2}$의 그래프를 각각 그려서 더한다고 생각하는 것이 좋다.

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 (+)함수를 그릴 때 $f(x)=0$이거나 $g(x)=0$이면 그 순간에는 곡선 $y=g(x)$나 $y=f(x)$를 지나게 되므로 먼저 그런 점을 표시해두면 그래프를 그리는데 정확도를 높일 수 있다.

따라서 점 $(-2,-2)$ $(0,2)$ $(2,2)$를 먼저 표시하고 시작하자.[3] 반원 $y=\sqrt{4-x^2}$의 기울기는 ∞부터 $-\infty$까지 점점 작아져 가는데 그 기울기에 모두 1을 더하면 된다. 따라서 계속해서



증가하다가 $y=\sqrt{4-x^2}$의 기울기가 -1이 될 때 극대를 가지고 그 이후로 감소하게 된다. 따라서 x축의 양의 방향에서 잰 각이 45도 일 때이므로 $x=\sqrt{2}$에서 극점을 가지게 된다. 극대가 되는 점은 $(\sqrt{2},2\sqrt{2})$이 된다.

이렇게 함수를 더하면서, 기울기까지 더하면 증가, 감소까지 논리적으로 파악할 수 있다.

미분해서 확인해보면 $(x+\sqrt{4-x^2})'=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)(\sqrt{4-x^2}-x)$이므로 $\sqrt{4-x^2}$과 x의 그래프의 빼기 함수에서 도함수의 부호를 판정하면 된다.[4]

3) 어려운 과정이 아니라 단순히 찾기 쉬워 보이는 함숫값 몇 개를 대입한 것에 불과하다.

4) 도함수의 식을 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)(\sqrt{4-x^2}-x)$ 으로 변형하는 이유는 $1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ 으로 도함수의 부호를 판정하는 것보다 훨씬 편하기 때문이다.
이처럼 **"도함수의 부호의 중요성"을 알고 있는 상태에서 식을 적절히 변형**하면 반드시 증가, 감소를 쉽게 파악할 수 있는 형태로 나오게 되어 있다. 또한 **도함수의 부호를 판정할 때에는 빼기 함수를 적극적으로 활용하는 연습을 해야 한다.**

(2) (1)의 그래프와 거의 유사하므로 자세한 풀이는 생략한다.

$y = x + \left(-\sqrt{4-x^2}\right)$이라 생각한 후에 더하기 함수로 그래프를 완성해보자.[1]

1) 반드시 기울기가 더해진다는 것을 스스로 연습해야 한다.

또한 도함수에 대한 연습을 해보자.

$y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$인데 이 상태로는 도함수의 부호를 판정하기가 많이 곤란하다.

왜냐하면 $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$이 오히려 처음 그리려던 함수보다 더 어렵게 느껴지기 때문인데 반드시 "도함수의 부호"만이 중요하기 때문에 부호에 영향을 주지 않는 함수는 얼마든지 곱하거나 나누면서 식을 변형하면 된다.[2] 즉,

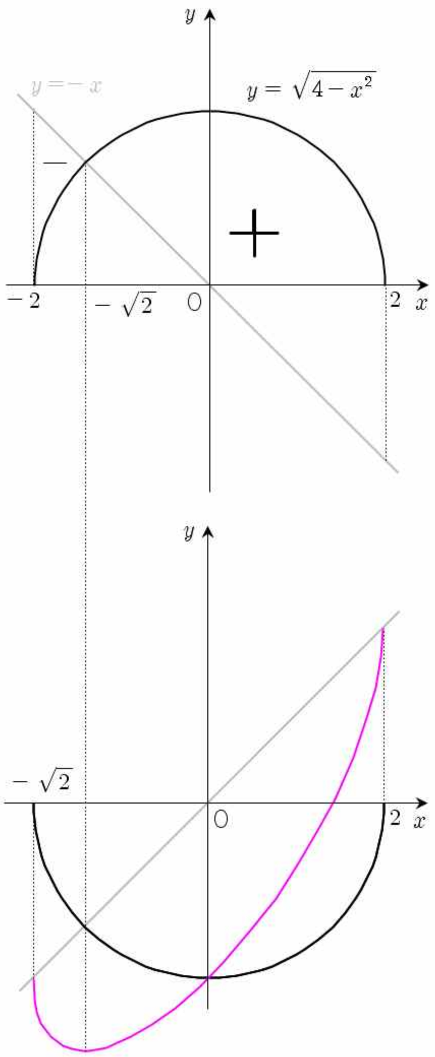
2) 난이도 있는 초월함수 문제에서 반드시 활용되는 발상이고 수능에도 여러번 출제되었다. 꼭 알아두어야 한다.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)\left(\sqrt{4-x^2}+x\right)$$

와 같이 변형하면 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$은 항상 양수이므로 도함수의 부호에 영향을 주지 않으므로 $\sqrt{4-x^2}+x$의 부호만 생각해주면 되는데 **"부호"가 중요하므로 모양 그대로 "더하기 함수"로 생각하기보다 "빼기 함수"로 생각해주는 것이 좋다.**
변형하면

$$\sqrt{4-x^2}+x = \sqrt{4-x^2}-(-x)$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 $\sqrt{4-x^2}$과 $-x$의 그래프를 그린 후 도함수가 양수인 구간과 음수인 구간을 따져서 원함수의 그래프를 그리면 된다.



이처럼 $x \pm \sqrt{4-x^2}$의 그래프를 그릴 때 도함수만을 활용하게 되면 그래프의 난이도가 훨씬 올라간다.
따라서 항상 <u>함숫값을 직접 더하면서 또 기울기도 직접 더하면서 그리면서 동시에 도함수까지 생각해주는 것이 최적의 방법임을 알 수 있다.</u> [3]

3) 어려워 보이지만 도함수의 부호까지 파악하는 연습을 완벽하게 해주어야 한다.

(3) $\frac{16}{x}$과 $-x^2+a$이 서로 다른 두 점에서 만날 때를 체크해야 하는데

가장 현명하지 못한 풀이는 곡선 $\frac{16}{x}$과 곡선 $-x^2+a$을 각각 그려서 푸는 풀이이다. 교점을 찾을 때 두 그래프 중 적어도 하나가 직선이 아니면 매우 문제가 어려워지므로 반드시 등호의 좌/우 중 하나의 함수를 직선으로 만들어야 한다.[1)]

생각할 수 있는 풀이는 $\frac{16}{x}=-x^2+a$에서 $-x^3+ax=16\ (x\neq 0)$으로 변형하여 정의역이 제한된 삼차함수 $y=-x^3+ax\ (x\neq 0)$와 상수함수 $y=16$의 교점을 찾는 문제로 보는 것이다. 그런데 이 풀이는 복잡한 함수인 삼차함수에 미지수가 있으므로 가장 비추천하는 풀이이고 차라리 $x^3+16=ax\ (x\neq 0)$로 해석해서 삼차함수의 그래프에 원점에서 그은 접선 문제로 바뀌는 것을 알 수 있다.[2)]

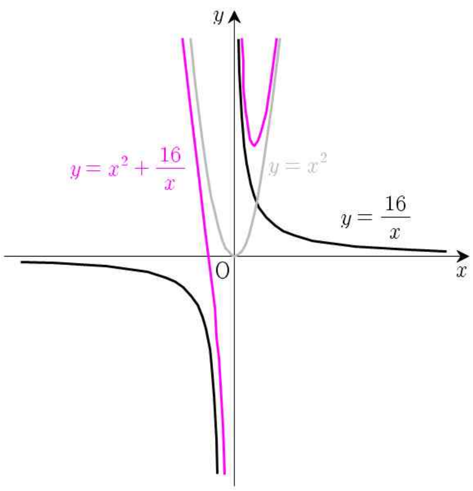
하지만 여기서 공부해보고자 하는 풀이는 $x^2+\frac{16}{x}=a$로 변형하여 초월함수

$y=x^2+\frac{16}{x}$과 상수함수 $y=a$의 위치관계로 보는 것이다.

초월함수 $y=x^2+\frac{16}{x}=(x^2)+\left(\frac{16}{x}\right)$이므로 이차함수와 분수함수의 더하기 함수로 해석하면서 동시에 도함수를 찾아보면 $y'=2x-\frac{16}{x^2}=\left(\frac{2}{x^2}\right)(x^3-8)$

이므로 $x=2$에서 부호가 바뀌고 $x=0$에서 정의가 되지 않는 것을 알 수 있다.
즉, $(-\infty,0)$에서 감소, $(0,2)$에서 감소, $(2,\infty)$에서 증가한다.
이를 토대로 그래프를 그려보면 다음과 같다.[3)]

따라서 극솟값 $(2,12)$을 가지는 것을 알 수 있고 $a=12$이 정답이 된다.



이처럼 **항상 더하기 함수를 그리면서 기울기도 같이 더할 뿐 아니라 도함수까지 모두 고려하여 그래프를 그리면 그래프를 매우 빠르고 정확하게 그려낼 수 있다.**

1) 직선 → 일차함수, 상수함수

2) 삼차함수 $y=x^3+16$과 직선 $y=ax$의 위치 관계로 문제를 풀면 접선문제로 바뀐다.

3) 결국 이 문제는 다항함수의 접선 문제 혹은 초월함수의 그래프 문제 두 가지 풀이 방법이 있다고 정리할 수 있는데 CP로 돌아가서 2012수능 19번 문제(접선CP와 초월함수 CP의 STEP2 문제)와 비교해보면 놀랍도록 비슷한 것을 알 수 있을 것이다.

(×) 함수 그리기

먼저 초월함수 CP에서 배웠던 곱하기 함수를 반드시 복습하고 공부하자.

① $\{x \mid f(x)=0 \text{ or } g(x)=0\} \Leftrightarrow \{x \mid f(x)g(x)=0\}$: x축과의 교점이 유지

② 양수 × 양수 = 양수, 음수 × 음수 = 양수, 양수 × 음수 = 음수

③ $\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty$

$\infty \times 0 = ?$: 직접 극한 계산

극한 계산 $skill$: $\ln x < \cdots < \sqrt{x} < x < x^2 < \cdots < e^x$ (힘의 세기)[1]

④ 특별히 자기 자신의 곱 $\{f(x)\}^2$의 그래프를 그릴 때[2]

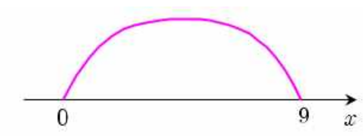
(a) $|f(x)| > 1$: 함숫값이 $|f(x)|$보다 더 커진다.

(b) $|f(x)| = 1$: $|f(x)|$의 값이 유지 된다.

(c) $|f(x)| < 1$: 함숫값이 $|f(x)|$보다 더 작아진다.

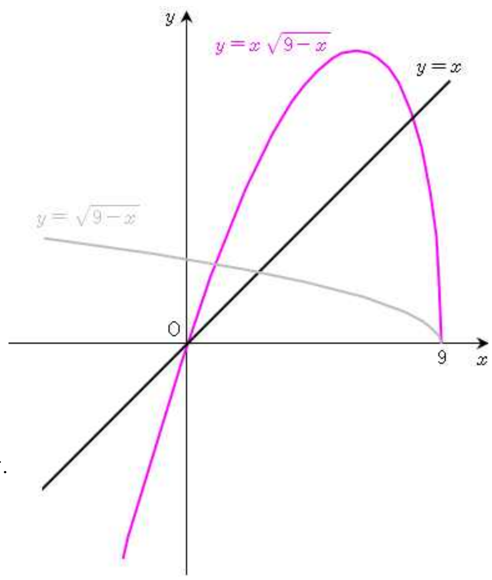
일단 위의 설명을 지금 완전히 이해할 필요는 없고 전체적으로 읽어보기만 하자. 예를 들어 그래프를 직접 그려보면서 이해하도록 하겠다.

먼저 $x\sqrt{9-x}$의 그래프를 그리면서 공부해보자.



먼저 $y=x$와 $y=\sqrt{9-x}$를 그린 후 **두 그래프에 함숫값이 0이 되는 점을 표시한다.**[3] 그 다음 각 구간에서의 양수, 음수 부호를 판단해보면 구간 $(-\infty, 0)$에서는 음수이고 구간 $(0, 9)$에서는 양수가 된다.

따라서 $y=0$인 점 두 개를 지나고 양수이면 개형이 위 그림과 같이 될 수밖에 없다.[4] $x \to -\infty$일 때, 오른쪽 그래프에서 보듯이 x은 $-\infty$로 가고 $\sqrt{9-x}$는 ∞로 가므로 두 값을 곱하면 $-\infty$가 된다. 이러한 것은 **수식을 보지 말고 그래프에서 바로 판단할 수 있도록 하자.**



이제 $x\sqrt{9-x}$을 미분해서 부호 변화만 생각하여 변형해보자.

$$\{x\sqrt{9-x}\}' = \sqrt{9-x} + \frac{-x}{2\sqrt{9-x}} = \left(\frac{3}{2\sqrt{9-x}}\right)(6-x)$$이므로 $6-x$만 고려해보면 $(-\infty, 6)$에서는 증가하고 $(6, 9)$에서는 감소하는 것을 알 수 있다.[5]

1) 테일러 전개를 배우면 논리적으로 이해할 수 있다. 특강에서 공부해보자. (논술대비용)

2) $\sqrt{f(x)}$의 그래프를 그릴 때는 정확히 반대가 된다.

3) $(0, 0)$과 $(9, 0)$을 표시 페이지 위쪽에서 공부한 ①에 해당하는 과정이다.

4) 이처럼 곱하기 함수를 그릴 때 함숫값이 0이 되는 양끝 점과 부호만 알면 대략적인 그래프의 개형은 매우 쉽게 그릴 수 있다.

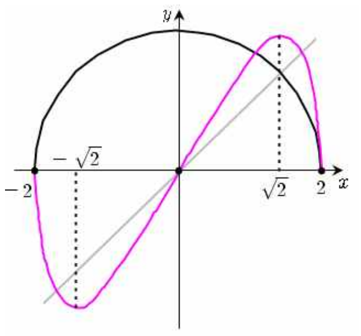
5) 따라서 정확한 극점의 좌표는 $(6, 6\sqrt{3})$이다.

다음 그래프를 같은 원리로 그려보자.

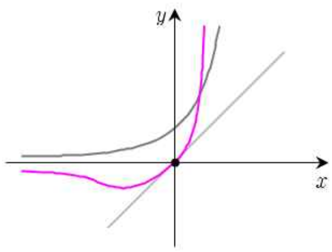
(1) $x\sqrt{4-x^2}$ (2) xe^x (3) $\dfrac{\ln x}{x}$

<정답>

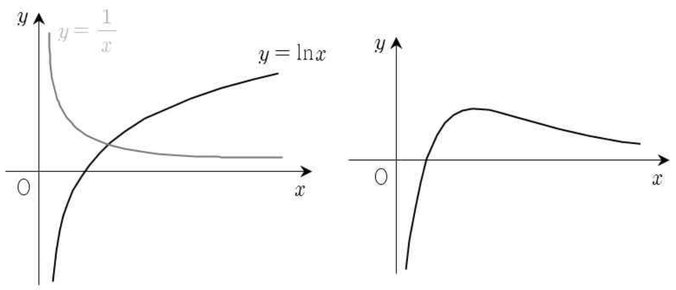
(1)



(2)

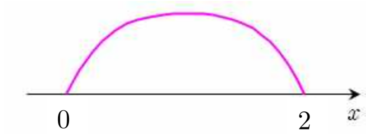


(3)



세 그래프 모두 앞서 초월함수 CP에서 공부했던 그래프[1]이므로 자세한 설명은 생략하고 핵심 내용만 공부해보자.

(1)에서는 두 점 $(0,\,0)$ $(2,\,0)$을 표시하고 구간 $(0,\,2)$에서 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프를 그리고 마찬가지로 $(-2,\,0)$에서도 아래로 볼록하게 대략적인 개형만 그려놓는 연습을 하면 된다.



(2)는 $(0,\,0)$을 지난다는 것 외에 공부할 것은 힘의 세기이다.

$x\to-\infty$일 때 $(+0)$과 $(-\infty)$가 곱해지는데 지수함수가 다항함수보다 힘의 세기가 세서 0으로 가는 힘이 더 세다. 따라서 $(+0)\times(-\infty)=(-0)$

(3)에서도 두 가지를 복습해보자. 먼저 $x\to\infty$일 때 $(+0)\times(+\infty)$가 되는데 다항함수 출신인 $\dfrac{1}{x}$가 더 힘이 세서 $(+0)\times(+\infty)=(+0)$임을 알 수 있다.

또한 $\dfrac{\ln x}{x}$는 나누기 함수처럼 보이지만 $(\ln x)\times\left(\dfrac{1}{x}\right)$처럼 곱하기 함수로 생각해줘야 한다는 것이다.

1) (1), (2)의 그래프는 개념설명에서 공부했었고, (3)의 그래프는 STEP1의 문제에 있었다.
잘 모르는 경우 반드시 돌아가서 복습하도록 하자.

여기까지 곱하기 함수에 대하여 정리해보면 다음과 같다.

곱하기 함수와 나누기 함수, $f(x)\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)$를 활용해서 그래프를 그리는 방법

① $f(x)$와 $\left(\overset{\times}{\underset{\div}{}}g(x)\right)$의 함숫값이 0이 되는 점을 모두 표시한다.[1]

② 각 구간에서 부호를 판정해서 그래프를 그린다. 예를 들어 $f(a)=f(b)=0$ 이고 $(a,\ b)$에서 양수면 그냥 위로 볼록하게 일단 그린다.

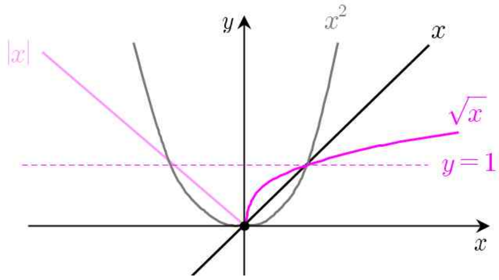
③ 미분을 해서 정확한 그래프의 개형을 파악한다.

④ $(\pm 0)\times(\pm\infty)=(\pm 0)$ or $(\pm\infty)$을 판정할 때, 힘의 세기를 고려한다.

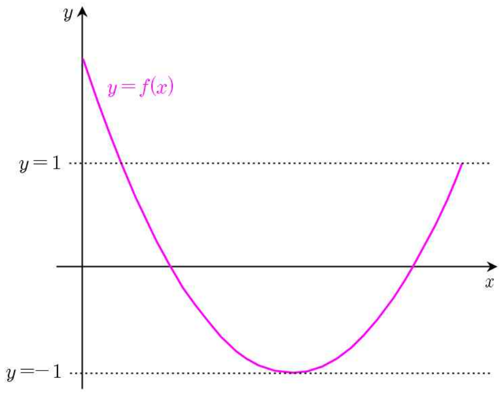
마지막으로 $f(x)$를 알고 있을 때, $\{f(x)\}^2$과 $\sqrt{f(x)}$의 그래프를 그려보자.

단순히 $\{f(x)\}^2$의 $f(x)$ 자리에 $\frac{1}{2}$, 2정도만 대입해보면 $\frac{1}{2}$을 넣으면 더 작아지고 2를 넣으면 더 커지는 것을 알 수 있다.

또한 $\sqrt{f(x)}$의 $f(x)$ 자리에 $\frac{1}{2}$, 2정도만 대입해보면 $\frac{1}{2}$을 넣으면 더 커지고 2를 넣으면 더 작아지는 것을 알 수 있다.

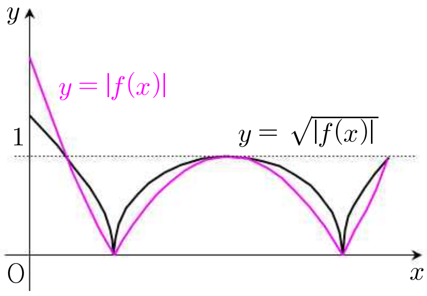


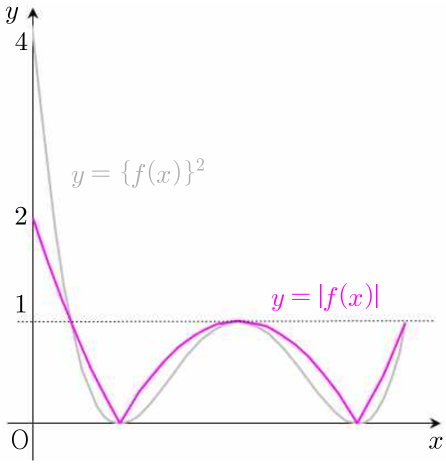
그림과 같이 세 곡선 $y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$을 한 그래프에 그려서 생각해보면 x의 함숫값이 더 커지는지 작아지는지 한 눈에 들어온다. 이와 같은 원리를 활용해서 다음과 같은 $y=f(x)$의 그래프를 보고 $y=\{f(x)\}^2$, $y=\sqrt{|f(x)|}$의 그래프를 직접 그려보자.



1) 나누기 함수도 다음과 같이 곱하기 함수로 생각한다.
$f(x)\div g(x)=f(x)\times\left(\frac{1}{g(x)}\right)$

먼저 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리자. 또한 $|f(x)|<1$이면 $\{f(x)\}^2$의 함숫값은 작아지고 $\sqrt{|f(x)|}$의 함숫값은 커진다는 사실과 $|f(x)|>1$이면 정확히 그 반대가 된다는 것을 활용해서 대략적으로 그래프의 개형을 그리면 된다.





이처럼 제곱근 함수나 제곱 함수의 경우 간혹 등장하니 자연스럽게 그래프를 그릴 수 있으면 된다. 애초에 더하기 함수, 빼기 함수, 곱하기 함수, 나누기 함수, 제곱 함수 등은 모두 함숫값을 대입한다는 관점에서 생각하면 모두 같은 원리이고 중학교 때부터 공부해오던 모눈종이에 점찍는 것과 같은 이론이다.

수학2에서 미분을 배우면서 논리적으로 그래프를 그릴 수 있게 되는데
그렇다고 해서 한 점씩 대입하는 발상을 버리면 절대 안 된다는 것이 핵심이다.

앞서 $\frac{\ln x}{x}$의 그래프를 그리면서 나누기 함수는 $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\left(\frac{1}{g(x)}\right)$와 같이 곱하기 함수로 생각해주는 것이 좋다고 했는데 그렇다면 $g(x)$의 역수그래프인 $\frac{1}{g(x)}$의 그래프를 그려야 곱하기 함수로 해석이 가능한 것을 알 수 있다.

이번에는 이 "역수 그래프"에 대하여 자세히 공부하기 전에 일단 명심할 것은
역수 그래프 또한 전혀 고교과정을 넘지 않고 결국은 한 점씩 대입한다는 원리에 불과하다는 것이다.

예를 들어 2의 역수는 $\frac{1}{2}$로 더 작아지고, $\frac{1}{3}$의 역수는 3으로 더 커진다는 성질이 활용되는 것뿐이다.

(÷)함수 그리기 → $1/f(x)$(역수 그래프) 그리기

① $\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$: (÷)함수 → 역수 그래프, (×)함수

② 증가 ↔ 감소 , 극대 ↔ 극소

③ 실근 ↔ 점근선 , ± 0 ↔ $\pm\infty$

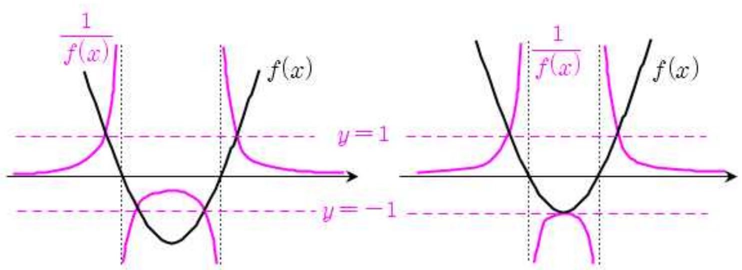
④ 역수를 해도 양수, 음수의 부호는 바뀌지 않는다.

⑤ $f(x)=\pm 1$을 기준으로 그래프가 역전된다.[1]

역수 그래프를 그릴 때 위와 같은 성질들을 생각해볼 수 있는데 모든 성질은 숫자를 하나하나 대입하는 관점에서 이해하면 한 번에 이해가 된다. 예를 들어 ③에서 실근이 점근선이 된다는 성질은 $x-1$의 역수 그래프 $\dfrac{1}{x-1}$정도를 생각해보면 $x=1$이 당연히 점근선이 된다는 것이고 $x\to 1+0$으로 보내보면 $x-1$은 $+0$으로 가지만 $+\infty$가 된다는 것뿐이다. 즉 **위의 성질을 이해하는 방법은 단순한 대입에 불과하다는 것을 명심하자.**

나누기 함수는 두 그래프를 그려놓고 그 값을 직접 나누면서 그리기가 매우 힘들다. 따라서 **나누기 함수는 ①과 같이 역수 그래프인 $\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프를 그려서 (×)함수로 해석**하는 것이 좋다. 또한 ②에서 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)$, $\dfrac{1}{f(x)}$의 도함수는 $\dfrac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로 양수, 음수 부호가 반대이므로 증가, 감소가 역전된다.

예를 들어 x^2+a를 a값에 따라 역수 그래프를 그리면서 알아보자.[2]



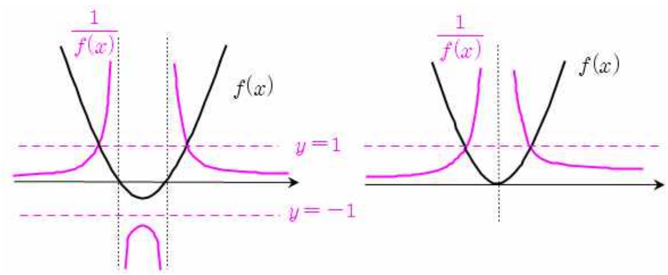
왼쪽 그림과 오른쪽 그림 모두 이차함수의 역수 그래프를 그린 것이라 생각하면 되는데 차이점은 왼쪽 그래프는 이차함수의 최솟값이 -1보다 작아서 역수를 하면 더 위로 커진다는 것이고, 오른쪽 그래프는 이차함수의 최솟값이 딱 -1이라서 역수를 하면 함숫값이 그대로라는 것이다. 이처럼 역수 그래프를 그릴 때 $y=1$과 $y=-1$이 경계선이 된다는 것을 명심하자.[3]

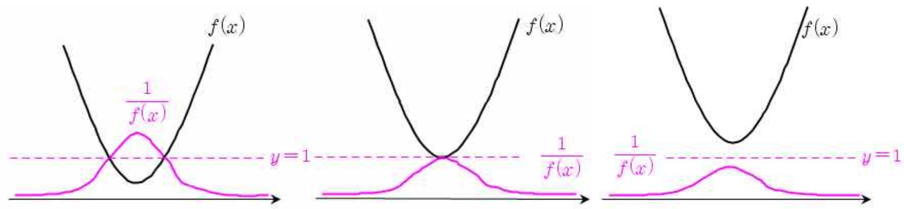
1) 상식적으로 대입해서 생각해보면 대부분 이해할 수 있다. 0.001의 역수는 1000으로 매우 크므로 ③을 이해할 수 있고, 당연히 역수를 해도 부호는 바뀌지 않는다. 또한 $\frac{1}{2}$의 역수는 2로 1보다 커지므로 ⑤를 이해할 수 있다.

2) 왼쪽 그래프는 x^2-2의 역수그래프인 $\dfrac{1}{x^2-2}$ 오른쪽 그래프는 x^2-1의 역수그래프인 $\dfrac{1}{x^2-1}$

3) 이미 수능에 한 번 출제되기도 했다.

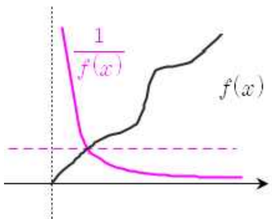
또한 두 그래프에서 보듯이 $\dfrac{1}{\pm 0} \to \pm\infty$ 이므로 실근이 곧 점근선이 됨을 확인할 수 있다. 이 같은 성질을 계속해서 활용해 보면 다음과 같다.[1]



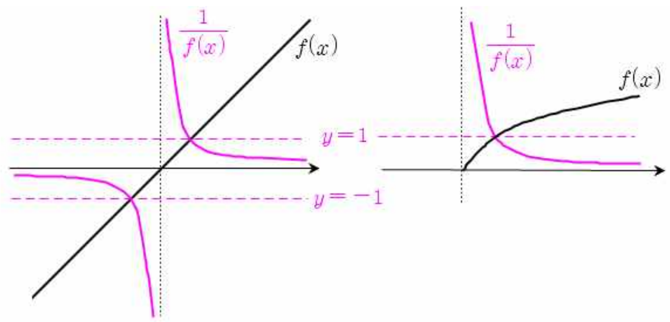


이처럼 이차함수 x^2+a의 역수 그래프를 a값에 따라 그려보면서 모두 연습해보는 것이 좋다.

결국 $f(0)=0$이고 $x>0$에서 증가하는 함수의 모양을 자주 만나게 되는데 역수 그래프의 개형은 그림과 같이 모두 유사하게 그려진다는 것이다.[2]



이 그래프의 대표적인 활용으로 $y=x$와 $y=\sqrt{x}$의 역수 그래프를 그려보면 다음과 같다.



1) 5개의 그래프 차례대로

$x^2-\frac{1}{2}$, x^2

$x^2+\frac{1}{2}$, x^2+1, x^2+2

의 역수 그래프

$\frac{2}{2x^2-1}$, $\frac{1}{x^2}$

$\frac{2}{2x^2+1}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{x^2+2}$

이라 생각하면 된다.

2) 결국 대충

$\lim_{x\to+0} f(x)=+0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

를 만족하는 증가함수 $f(x)$의 역수의 개형은 모두 유사하게 그려진다.

역수 그래프가 활용되었던 몇 가지 기출문제를 풀어보자.

양수 a에 대하여 폐구간 $[-a, a]$에서 함수

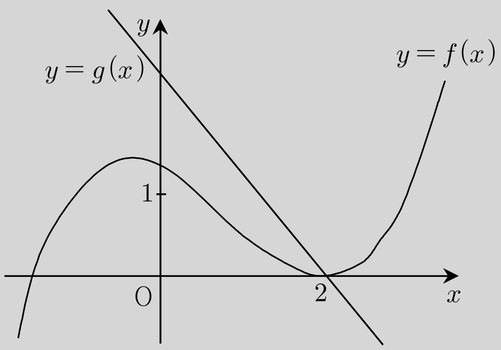
$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [2006]

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $P(2, 0)$에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다.
$1 < f(0) < g(0)$일 때, 방정식

$$f(x)+g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}$$

의 실근의 개수는? [2010]



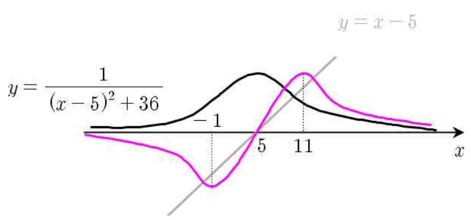
두 문제를 반드시 스스로 풀어본 후에 해설을 읽어보도록 하자.

〈첫 번째 문제 풀이〉[1] 두 번째 문제 풀이

먼저 곱하기 함수로 해석해야 하므로

$$f(x) = (x-5) \times \left(\frac{1}{(x-5)^2+36} \right)$$

에서 일차함수 $(x-5)$와 이차함수 $(x-5)^2+36$의 역수그래프를 그려야 한다. 또한 도함수를 구해보면



$$f'(x) = \frac{(x-5)^2+36-2(x-5)^2}{\{(x-5)^2+36\}^2} = \frac{-(x-11)(x+1)}{\{(x-5)^2+36\}^2} \text{ 이므로}$$

$(-\infty, -1)$에서는 감소, $(-1, 11)$에서는 증가, $(11, \infty)$에서는 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 그래프가 오른쪽 그림과 같이 완성되어 정답은 $a=11$이다.

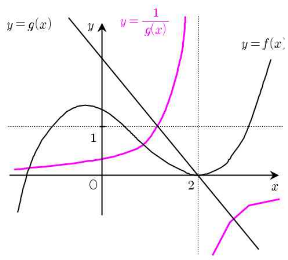
1) 〈두 번째 문제 풀이〉

일단 정답은 4이다.

예전 교육과정 수학2 방정식과 부등식 문제이지만 역수그래프 자체로 공부에 도움이 되므로 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하여 해결해보자.

마지막 $f(x)g(x)=1$이라는 방정식을 풀 때, $f(x)=\frac{1}{g(x)}$나 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$로 풀어야 한다.

그런데 여기서 역수 그래프를 그려야 하므로 삼차함수보단 일차함수의 역수가 편하므로 $f(x)=\frac{1}{g(x)}$으로 푸는 것이 좋다. 그런데 문제의 그래프에 좌표 1이 표시되어 있는 이유는 다음과 같이 역수를 할 때 명백히 그 점을 지나도록 역수를 해야 하기 때문이다.



사실 $y=1$이 경계선이 된다는 것만 정확하게 알면 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$로 삼차함수의 역수 그래프를 그려서 풀어도 정확하게 답이 나온다.

반드시 직접 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$으로도 풀어보도록 하자.